4. ИНТЕГРАЛЫ: РАЗНОЕ

Задача 1.

Задача 2. а) Пусть $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Обязательно ли сходится $\int_0^{+\infty} f^3(x)\,dx$? б) А если $f(x)$ ограничена ? в) Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$ и существует предел ("несобственный интеграл") $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a\to-\infty,\,b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$. Обязательно ли f суммируема ? г) Пусть в условиях пункта 2в f суммируема. Докажите, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ есть ее интеграл Лебега по $\mathbb{R}$.

Задача 3. Пусть $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Докажите, что при любом $\varepsilon\ge 0$ интеграл $A(\varepsilon)=\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x}f(x)\,dx$ сходится, и $\lim_{\varepsilon\to+0}A(\varepsilon)=A(0)$.

Задача 4. Пусть $B_n=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\le 1\}$. При каких n и k сходится $\int_{B_n}\frac{dx}{|x|^k}$? Чему он равен ?

Задача 5. а) Докажите, что при всех $\varepsilon>0$ интеграл $A(\varepsilon)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{1+\varepsilon}}$ сходится, а при $\varepsilon=0$ — расходится. б) Докажите, что $A(\varepsilon)\sim\frac{1}{2\varepsilon}$ при $\varepsilon\to+0$.

Задача 6. Пусть $x\in\mathbb{R}^3$, а B_3 — как в задаче 4. а) Докажите, что $\int_{B_3}\frac{dy}{|x-y|}$ зависит только от $|x|$. б) Вычислите этот интеграл.

Задача 7. Вычислите $\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2/2}\,dx$ при всех $m\in\mathbb{N}$.

Задача 8. Пусть A — положительно определенная матрица $n\times n$. Вычислите $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(Ax,x)/2}\,dx$, а) если $A=I$ (единичная матрица); б) если $n=2$ (а матрица A произвольна); в) в общем случае.

Задача 9. Пусть A — положительно определенная матрица $n\times n$. Вычислите $\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j e^{-(Ax,x)/2}\,dx$, где $1\le i,j\le n$.