5. ВЛОЖЕННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ.

В задачах 1–3 имеются следующие три задания:

(а) показать, что данное множество является подмногообразием в $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ или $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$;

(б) найти его размерность;

(в) описать его касательное пространство в точке, соответствующей единичной матрице, как векторное подпространство в $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ или $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Задача 1. $SL_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ — группа матриц с определителем 1.

Задача 2. $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid {}^tM \cdot M = \mathrm{Id}\}$.

Задача 3. $U_n = \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{M} \cdot M = \mathrm{Id}\}$.

Задача 4. Пусть $\Pi_1, \Pi_2 \subset \mathbb{R}^3$ — непараллельные плоскости. $p \notin \Pi_1, \Pi_2$ — точка, а $\pi_p : \Pi_1 \to \Pi_2$ — центральная проекция. Покажите, что производная $\pi_p'(a)$ невырождена во всякой точке $a \in \Pi_1$, где определена π_p.

Задача 5. Пусть $X \subset \mathbb{R}^3$ — сфера радиуса 1 с центром в начале координат, $p \in \mathbb{R}^3$ — точка вне сферы, $H \subset \mathbb{R}^3$ — плоскость, не проходящая через p и $\pi_p \colon X \to H$ — проекция. Выясните, каков ранг отображения $\pi_p'(a)$ в различных точках $a \in X$ (постарайтесь по возможности минимизировать прямые вычисления.)

Задача 6. Пусть $m_1, \ldots, m_n$ — целые положительные числа. Докажите, что множество

$$X = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum |z_i|^2 = 1, \sum z_i^{m_i} = 0\}$$

является подмногообразием в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$.

Задача 7. Пусть Q — положительно определенная квадратичная форма от $x_0, \ldots, x_n$ (например, $Q(x_0, \ldots, x_n) = x_0^2 + \cdots + x_n^2$), и пусть через $\mathbb{RP}^n$ обозначено n-мерное проективное пространство с однородными координатами $(x_0 : \ldots : x_n)$. Покажите, что отображение $v \colon \mathbb{RP}^n \to \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)/2}$, действующее по формуле

$$(x_0 : \ldots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_0^2}{Q}, \ldots, \frac{x_n^2}{Q}, \frac{x_0x_1}{Q}, \frac{x_0x_2}{Q}, \ldots, \frac{x_{n-1}x_n}{Q}\right)$$

(в числителях в правой части — все квадратичные мономы), является вложением и что его образ — подмногообразие в $\mathbb{R}^{(n+1)(n+2)/2}$.