6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Определение. Преобразование Фурье функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — функция $F(f)(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\lambda x}\,dx$. Коэффициенты Фурье функции $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ — числа $c_n(f) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}\,dx$, $n \in \mathbb{Z}$. Ряд Фурье последовательности c_n — функция $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-2\pi int}$. Обратное преобразование Фурье (ряд Фурье, коэффициенты Фурье) задается равенством $\tilde{F} = F \circ N$, где $N(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(-x)$ для функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $N(f)(x) = f(1-x)$ для функций $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ и $N(c)_n = c_{-n}$ для последовательностей. Свертка функций $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — функция $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt$; аналогично для функций $f, g : [0,1] \to \mathbb{C}$. Свертка последовательностей a_n, b_n — последовательность $c_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k}$.

Факты. Прямое и обратное преобразование Фурье взаимно обратны. Преобразование Фурье сохраняет норму L_2: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)(\lambda)|^2\,d\lambda$ для функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ и $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2\,dx$ для функции $f : [0,1] \to \mathbb{C}$. Преобразование Фурье переводит свертку в произведение и наоборот: $F(fg) = F(f) * F(g)$, $F(f * g) = F(f)F(g)$. Тождество Эйлера: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, откуда $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

Задача 1. Докажите, что а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$ при $0 < x < 2\pi$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^n}{n} \sin nx = x$ при $0 < x < \pi$; в) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = x$ при $0 < x < \pi$; г) $\frac{\pi}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx = x^2$ при $|x| < \pi$. Примените к полученным равенством утверждение о том, что преобразование Фурье сохраняет норму L_2. Подумайте, почему в 1б и 1в получаются разные ряды Фурье для одной функции.

Задача 2. Используя ряды Фурье, найдите суммы рядов а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Задача 3 (явление Гиббса). Докажите, что а) $1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ при $0 < x < \pi$; б) функция $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ достигает максимального значения μ_n при $x = \frac{\pi}{2n}$; в) $\lim_{n\to\infty} \mu_n > 1$.

Задача 4. Докажите, что для целого положительного m функция $B_m(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ku + m\pi/2)}{k^m}$ на отрезке $[0, 2\pi]$ совпадает с многочленом степени m (многочлен Бернулли).

Задача 5 (неравенство Виртингера). Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ бесконечно гладкая, причем $f0) = f(1)$ и $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Докажите, что $\int_0^1 f^2(x)\,dx \le \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 (f')^2(x)\,dx$. Для каких функций достигается равенство ?

Задача 6. Найдите преобразования Фурье для функций а) $f(x) = 1$ при $|x| \le a$, $f(x) = 0$ при $|x| > a$; б) $e^{-a|x|}$; в) $\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\pi x^2/a^2}$; г) $1/\sqrt{x}$. Проверьте, что норма L_2 сохраняется.

Задача 7. Найдите свертку $f_{c_1} * f_{c_2}$, где а) $f_c(x) = \frac{1}{\sqrt{c}}e^{-\pi x^2/c^2}$, б) $f_c(x) = \frac{c}{c^2+x^2}$. Проверьте равенство $F(f_{c_1} * f_{c_2}) = F(f_{c_1})F(f_{c_2})$.

Задача 8. Используя преобразование Фурье, найдите интегралы а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2\,dx$; г) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\,dx$.

Задача 9 (формула Котельникова). Пусть для функции f ее преобразование Фурье финитно: $F(f)(y) = 0$ при $|y| > a$. Докажите, что $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a}k\right) \frac{\sin a(x - \frac{\pi}{a}k)}{a(x - \frac{\pi}{a}k)}$.