1. Кольца и идеалы

Коммутативная алгебра — это наука о коммутативных кольцах и модулях над ними. При этом в коммутативной алгебре изучают свойства колец, характерные для колец функций на каком-то «пространстве» (в самом широком смысле этого слова); если же кольцо изначально задано не в виде кольца функций, то подходящее пространство стараются построить.

Под словом «кольцо» в этом курсе будет (если явно не оговорено обратное) пониматься коммутативное кольцо с единицей; термин «гомоморфизм колец» будет означать «гомоморфизм, переводящий единицу в единицу», а слово «подкольцо» — «подкольцо, содержащее единицу». Заметим, что в кольце имеем $1 \neq 0$ тогда и только тогда, когда кольцо содержит более одного элемента.

Если кольцо A содержит в качестве подкольца поле k, то говорят, что это кольцо является *k-алгеброй*; гомоморфизм k-алгебр — это, по определению, гомоморфизм колец, оставляющий на месте все элементы поля k.

Кольцо A называется *целостным*, если в нем нет делителей нуля (т. е. из $x \neq 0$ и $y \neq 0$ вытекает, что $xy \neq 0$). Идеал $\mathfrak{a} \subset A$ будет называться *собственным*, или *неединичным*, если $\mathfrak{a} \neq A$. Ясно, что следующие три условия равносильны: (1) идеал является неединичным; (2) идеал не содержит единицы; (3) идеал не содержит обратимых элементов кольца.

Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — то идеалы кольца, то в нем определены идеалы $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ (буквально пересечение), $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ (множество сумм вида $a + b$, где $a \in \mathfrak{a}$ и $b \in \mathfrak{b}$ — это наименьший идеал, содержащий $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$) и $\mathfrak{ab}$ — идеал, порожденный всевозможными произведениями вида ab, где $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$; по-другому можно сказать, что $\mathfrak{ab}$ — множество всевозможных сумм вида $a_1b_1 + \ldots + a_rb_r$, где $a_i \in \mathfrak{a}$, $b_i \in \mathfrak{b}$. Очевидно, всегда имеет место включение $\mathfrak{ab} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Простые и максимальные идеалы

Вот первое определение коммутативной алгебры.

Определение 1.1. Пусть A — кольцо. Идеал $\mathfrak{p} \subset A$ называется *простым*, если $\mathfrak{p} \neq A$ и $A/\mathfrak{p}$ — целостное кольцо.

Например, простые идеалы в кольце $\mathbb{Z}$ суть нулевой идеал и идеалы, порожденные простыми числами.

Определение 1.2. Идеал $\mathfrak{m} \subset A$ называется *максимальным*, если $\mathfrak{m} \neq A$ и для всякого идеала $\mathfrak{a} \supsetneq \mathfrak{m}$ имеем $\mathfrak{a} = A$.

Предложение 1.3. *Идеал $\mathfrak{m} \subset A$ максимален тогда и только тогда, когда $A/\mathfrak{m}$ — поле.*

Доказательство. Согласно определению, $\mathfrak{m}$ максимален тогда и только тогда, когда он не содержится ни в одном строго большем собственном идеале, или, что равносильно, когда в факторкольце $A/\mathfrak{m}$ нет ненулевых собственных идеалов; это последнее условие равносильно тому, что все ненулевые элементы в $A/\mathfrak{m}$ обратимы, т. е. что $A/\mathfrak{m}$ — поле. $\square$

Следствие 1.4. *Всякий максимальный идеал является простым.* $\square$

Например, в $\mathbb{Z}$ максимальны идеалы вида (p), где p — простое число, и только они; нулевой идеал прост, но не максимален.

Предложение 1.5. *Во всяком кольце существует хотя бы один максимальный идеал.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a}$ — какой-нибудь собственный идеал кольца A (хотя бы один есть всегда — например, нулевой). Если он уже максимален, то все доказано; в противном случае есть строго бóльший его идеал $\mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}$; если он максимален, то все доказано, если нет, то рассмотрим строго бóльший идеал $\mathfrak{a}_2$; если до максимального идеала мы так и не доберемся, то рассмотрим объединение получившейся цепочки идеалов, и т. д., пока не дойдем до максимального идеала.

Формализуется это «и т. д.», как водится, с помощью леммы Цорна. Именно, множество собственных идеалов кольца A частично упорядочено отношением включения, и к тому же всякое линейно упорядоченное семейство собственных идеалов $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ имеет верхнюю грань, а именно $\mathfrak{a} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i$; то, что это идеал, очевидно из линейной упорядоченности, и он является собственным, поскольку если $1 \in \mathfrak{a}$, то $1 \in \mathfrak{a}_i$ для некоторого i. Теперь из леммы Цорна следует, что в множестве собственных идеалов существует максимальный элемент. $\square$

Следствие 1.6. *Всякое кольцо содержит хотя бы один простой идеал.*

Следствие 1.7. *Всякий собственный идеал $\mathfrak{a} \subset A$ содержится хотя бы в одном максимальном идеале.*

Доказательство. Имеется естественная биекция между идеалами в $A/\mathfrak{a}$ и идеалами в A, содержащими $\mathfrak{a}$; поскольку она сохраняет включения, максимальные идеалы в $A/\mathfrak{a}$ соответствует при этом максимальным идеалам в A. $\square$

Доказательство следующего тривиального, но важного факта предоставляется читателю.

Предложение 1.8. *Если $f\colon A \to B$ — гомоморфизм колец и $\mathfrak{p} \subset B$ — простой идеал, то $f^{-1}(\mathfrak{p}) \subset A$ — тоже простой идеал.* $\square$

Если заменить в этом предложении слово «простой» на «максимальный», то оно станет неверным (простейший пример: вложение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$).

Пример 1.9. Пусть X — топологическое пространство и $C(X)$ — кольцо непрерывных вещественнозначных функций на X. Для всякого подмножества $Y \subset X$ обозначим через $I(Y)$ множество функций, являющихся тождественным нулем на Y. Очевидно, что $I(Y)$ — идеал в $C(X)$. Пусть, в частности, $x \in X$ — одна точка и $\mathfrak{m}_x = I(\{x\})$ — множество функций, обращающихся в нуль в x. Тогда $\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал (потому, например, что он является ядром сюръективного гомоморфизма $C(X) \to \mathbb{R}$, действующего по правилу $f \mapsto f(x)$). Можно показать (мы займемся этим на упражнениях), что если X — хаусдорфов компакт, то *всякий* максимальный идеал в $C(X)$ имеет вид $\mathfrak{m}_x$ для некоторого $x \in X$. Далее, если пространство X нормально, то из леммы Урысона вытекает, что при $x \neq y$ существует функция $f \in C(X)$, для которой $f(x) = 0$, но $f(y) \neq 0$, так что $\mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y$. Поскольку всякий хаусдорфов компакт нормален, получаем следующее:

> *если X компактно и хаусдорфово, то отображение $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ задает взаимно однозначное соответствие между X и множеством максимальных идеалов кольца $C(X)$.*

Алгебраические множества

Пример 1.9 был чисто учебным; сейчас, напротив, мы приведем пример, который будет играть в нашем курсе важную роль.

Пусть k — алгебраически замкнутое поле и $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ — кольцо многочленов над k от n переменных.

Если $V \subset k^n$, то, как и прежде, положим

$$I(V) = \{f \in A | f(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \text{как только } x_1, \ldots, x_n \in V\}.$$

Ясно, что $I(V) \subset A$ — идеал. Для $x \in k^n$ положим $\mathfrak{m}_x = I(\{x\})$ (множество многочленов, обращающихся в нуль в x). Ясно, что $\mathfrak{m}_x \subset A$ — максимальный идеал, и очевидно (на сей раз без леммы Урысона), что $\mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y$, если $x \neq y$. Аналогия с примером 1.9 простирается и далее. Именно, имеет место следующий важный факт.

Теорема 1.10 (Теорема Гильберта о нулях). *Всякий максимальный идеал кольца $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ имеет вид $\mathfrak{m}_x$ для некоторой $x \in k^n$.*

Теорему Гильберта о нулях мы докажем позднее; пока что примем ее без доказательства и пойдем дальше.

Следствие 1.11 (из теоремы о нулях). *Отображение $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ задает взаимно однозначное соответствие между точками пространства k^n и максимальными идеалами кольца $k[X_1, \ldots, X_n]$.*

Определение 1.12. Пусть $M \subset A$ — некоторое множество многочленов. Через $V(M) \subset k^n$ будем обозначать множество

$$\{x \in k^n \mid f(x) = 0 \text{ для всех } f \in M\}.$$

Алгебраическим подмножеством $X \subset k^n$ называется всякое множество вида $V(M)$, где $M \subset A$.

Если $M \subset A$ — произвольное подмножество и $I \subset A$ — идеал, порожденный множеством M (т.е. наименьший идеал, содержащий M), то $V(I) = V(M)$ (поскольку элементы I имеют вид $\sum f_k g_k$, где $g_j \in M$, все уравнения, задающие $V(I)$, являются следствиями уравнений, задающих $V(M)$). Поэтому всякое алгебраическое множество имеет вид $V(I)$, где $I \subset A$ — идеал.

Предложение 1.13. (i) *Пустое множество и все k^n являются алгебраическими множествами.*

(ii) *Пересечение любого семейства алгебраических множеств является алгебраическим множеством.*

(iii) *Объединение двух алгебраических множеств является алгебраическим множеством.*

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) очевидны. Утверждение (iii) следует из того, что если $I, J \subset A$ — идеалы, то $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$. $\square$

Из доказанного предложения явствует, что алгебраические подмножества в k^n удовлетворяют аксиомам для замкнутых подмножеств топологического пространства.

Определение 1.14. *Топологией Зарисского* на k^n называется топология, в которой замкнутыми являются алгебраические подмножества и только они.

В свете этого определения алгебраические подмножества можно еще называть *множествами, замкнутыми по Зарисскому.*

Упражнение 1.15. (i) Покажите, что при $n > 0$ топология Зарисского неотделима.

(ii) Покажите, что всякое конечное множество замкнуто в топологии Зарисского.

Предложение-определение 1.16. *Пусть $Z \subset k^n$ — алгебраическое множество. Тогда* регулярной функцией *на Z называется функция $f\colon Z \to k$, являющаяся ограничением на Z какого-нибудь многочлена $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$, рассматриваемого как функция $P\colon k^n \to k$.*

Регулярные функции на Z образуют кольцо, обозначающееся $k[Z]$. Если обозначить через $I(Z) \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ множество всех многочленов, тождественно обращающихся в нуль на Z, то $I(Z)$ — идеал в $k[X_1, \ldots, X_n]$ и $k[Z] \simeq k[X_1, \ldots, X_n]/I(Z)$. $\square$

Следствие 1.11 обобщается на произвольные алгебраические множества:

Следствие 1.17 (по модулю теоремы о нулях). *Пусть $Z \subset k^n$ — алгебраическое множество и $x \in Z$. Положим*

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in k[Z] \mid f(x) = 0\}.$$

Тогда отображение $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ задает взаимно однозначное соответствие между Z и множеством максимальных идеалов кольца $k[Z]$.

Доказательство. Докажем сюръективность этого отображения (все прочее совсем очевидно). Пусть $\pi\colon k[X_1, \ldots, X_n] \to k[Z]$ — естественная сюръекция и $\mathfrak{m} \subset k[Z]$ — максимальный идеал. Ясно, что $\pi^{-1}(\mathfrak{m}) \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ — тоже максимальный идеал. Ввиду следствия 1.11 он имеет вид $\mathfrak{m}_x$ для некоторой $x \in k^n$; поскольку по построению $\mathfrak{m}_x \supset I(V)$, все многочлены, задающие Z, обращаются в нуль в точке x, так что $x \in Z$. Дальнейшее ясно. $\square$

Наряду с регулярными функциями на алгебраических множествах естественно рассматривать регулярные отображения из одного алгебраического множества в другое.

Определение 1.18. Пусть $Z \subset k^n$, $W \subset k^m$ — алгебраические множества (напомним, что основное поле k предполагается алгебраически замкнутым). Отображение $\varphi\colon X \to Y$ называется *регулярным*, если существуют такие функции $f_1, \ldots, f_m \in k[Z]$, что $\varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ для всякого $x \in Z$.

Пусть $\varphi\colon Z \to W$ — регулярное отображение и $f \in k[W]$ — регулярная функция. Тогда функция $f \circ \varphi\colon Z \to k$ также регулярна (поскольку суперпозиция многочленов — многочлен).

Обозначение 1.19. Пусть $\varphi\colon Z \to W$ — регулярное отображение и $f \in k[W]$. Тогда композицию $f \circ \varphi \in k[Z]$ будем обозначать $\varphi^*(f)$.

Ясно, что $\varphi^*\colon k[W] \to k[Z]$ — гомоморфизм k-алгебр. Следующее простое предложение является очень важным.

Предложение 1.20. *Пусть $Z \subset k^n$, $W \subset k^m$ — алгебраические множества. Тогда отображение $\varphi \mapsto \varphi^*$ задает взаимно однозначное соответствие между регулярными отображениями из Z в W и гомоморфизмами k-алгебр из $k[W]$ в $k[Z]$.*

Доказательство. Покажем только, как построить регулярное отображение по гомоморфизму k-алгебр, а проверки предоставим читателю. Итак, пусть $a\colon k[W] \to k[Z]$ — гомоморфизм k-алгебр. Для всякого целого $i \in [1; m]$ обозначим через $y_i \in k[W]$ функцию $(Y_1, \ldots, Y_m) \mapsto$

Y_i («i-ю координату»), и положим $f_i = a(y_i) \in k[Z]$. Мы утверждаем, что образ отображения $\varphi\colon Z \to k^m$, заданного по формуле $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, содержится в Y. В самом деле, пусть h — любой из многочленов, задающих Y. Тогда $h(y_1, \ldots, y_m) = 0$. Поскольку a — гомоморфизм k-алгебр, отсюда вытекает, что $h(a(y_1), \ldots, a(y_n)) = 0$, т. е. что $h(f_1(x), \ldots, f_m(x)) = 0$ для всякой точки $x \in Z$. Ввиду произвольности выбора h отсюда следует, что $\varphi(Z) \subset W$, так что φ — регулярное отображение из Z в W. □

Согласно следствию 1.17, точки алгебраического множества Z — «то же самое», что максимальные идеалы кольца $k[Z]$. Выясним еще, как регулярные отображения действуют на максимальные идеалы.

Предложение 1.21. *Пусть $\varphi\colon Z \to W$ — регулярное отображение алгебраических множеств. Тогда для всякой точки $x \in Z$ имеем $\mathfrak{m}_{\varphi(x)} = \varphi^{*-1}(\mathfrak{m}_x)$.*

Доказательство тривиально.

Нётеровы кольца и модули

В определении алгебраических множеств мы допускали бесконечные системы уравнений, но на самом деле всякая бесконечная система полиномиальных уравнений равносильна конечной. Дело в том, что, как мы сейчас докажем, всякий идеал в кольце многочленов над полем конечно порожден. Кольца, аналогичные в этом отношении кольцам многочленов, настолько важны, что для них имеется специальный термин.

Предложение-определение 1.22. *Кольцо A называется* нётеровым, *если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:*

(i) *Если*

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots \mathfrak{a}_m \subset \ldots$$

— последовательность вложенных друг в друга идеалов кольца A, то начиная с некоторого r имеем

$$\mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}_{r+1} = \mathfrak{a}_{r+2} = \ldots$$

(иными словами, всякая возрастающая цепочка идеалов в A стабилизируется);

(ii) *Всякое семейство идеалов кольца A имеет максимальный элемент. (Максимальный — это такой, что не содержится ни в каком бóльшем, а не тот, что содержит все остальные.)*

(iii) *Всякий идеал $I \subset A$ конечно порожден.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) очевидно.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): пусть $I' \subset I$ максимален в семействе конечно порожденных идеалов, содержащихся в I; если $f \in I \setminus I'$, то идеал $I' + (f)$ строго содержит I', содержится в I и конечно порожден — противоречие.

(iii) $\Rightarrow$ (i): пусть идеал $\mathfrak{a} = \bigcup \mathfrak{a}_i$ порожден элементами $f_1, \ldots, f_s$, и пусть $\mathfrak{a}_r$ содержит все $f_1, \ldots, f_s$. Тогда $\mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}$, так что начиная с $\mathfrak{a}_r$ все идеалы в этой последовательности совпадают. $\square$

Ясно, что всякое поле является нётеровым кольцом. Всякое кольцо главных идеалов (в частности, $\mathbb{Z}$) также, очевидно, нётерово. Наконец, из условия (iii) очевидно, что всякое факторкольцо нётерова кольца также нётерово.

Предложение 1.23. *Если A — нётерово кольцо, то кольцо многочленов $A[X]$ также нётерово.*

Доказательство. Пусть $I \subset A[X]$ — идеал. Для всякого целого неотрицательного m обозначим через $\mathfrak{a}_m \subset A$ подмножество, состоящее из нуля и старших коэффициентов всевозможных многочленов $f \in I$, имеющих степень m. Поскольку I замкнут относительно умножения на элементы из A, все $\mathfrak{a}_m$ являются идеалами; поскольку I замкнут относительно умножения на X, имеем $\mathfrak{a}_m \subset \mathfrak{a}_{m+1}$ для всех m; поскольку A нётерово, имеем $\mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}_{r+1} = \ldots$ для некоторого r.

Так как A нётерово, каждый из идеалов $\mathfrak{a}_i \subset A$ конечно порожден; для каждого $i \in [0; r]$ положим $\mathfrak{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{is_i})$, и пусть $f_{il} \in I$ — многочлен степени i со старшим коэффициентом a_{il}. Мы утверждаем, что I порожден многочленами f_{il}. В самом деле, пусть $I' \subset I$ — идеал, порожденный многочленами f_{il}. Покажем, что $f \in I'$ для всякого многочлена $f \in I$, индукцией по $\deg f$.

Пусть $f = b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n$, и пусть для всех $f \in I$ степени, меньшей n, утверждение доказано. Если $n \geqslant r$, то $b_n \in \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_r$, так что $b_n = c_1 a_{rs_1} + \ldots + c_{s_r} a_{rs_r}$, где $c_1, \ldots, c_{s_r} \in A$; положим $g = X^{n-r}(c_1 f_{rs_1} + \ldots + c_{s_r} f_{rs_r})$; тогда $g \in I$, причем старшие члены у f и g совпадают, так что $\deg(f - g) < n$, $f - g \in I'$ по предположению индукции и $f \in I$. Если же $n < r$, то $b_n \in \mathfrak{a}_n$, $b_n = c_1 a_{ns_1} + \ldots + c_{s_n} a_{ns_n}$, и если положить $g = \sum c_i f_{ns_i}$, то $f - g \in I'$. $\square$

Следствие 1.24 (Теорема Гильберта о базисе). *Если k — поле, то кольцо многочленов $k[X_1, \ldots, X_n]$ нётерово.*

Следствие 1.25. *Всякое кольцо, конечно порожденное над полем или $\mathbb{Z}$, является нётеровым.*

Понятие нётеровости удобно распространить и на модули:

Предложение-определение 1.26. *Модуль M (над кольцом A) называется* нётеровым, *если он удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:*

(i) *Всякая возрастающая цепочка подмодулей модуля M стабилизируется.*

(ii) *Всякое семейство подмодулей в M имеет максимальный элемент.*

(iii) *Всякий подмодуль $M' \subset M$ конечно порожден.*

Эквивалентность этих условий доказывается так же, как в 1.22. Заметим, что кольцо A нётерово тогда и только тогда, когда оно является нётеровым A-модулем.

Вот основное свойство нётеровых модулей.

Предложение 1.27. *Пусть*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

— точная последовательность модулей. Тогда модуль M нётеров в том и только том случае, когда M' и M'' нётеровы.

Доказательство. Попросту говоря, предложение утверждает следующее:

1) Всякий подмодуль и фактормодуль нётерова модуля является нётеровым.

2) Если подмодуль $M' \subset M$ и фактормодуль M/M' являются нётеровыми, то и сам модуль M нётеров.

Утверждение (1) очевидно из определений; для доказательства (2) заметим, что если $M_1 \subset M_2 \subset \dots$ — возрастающая цепочка подмодулей в M, то по условию существует такое $k > 0$, что $M_k \cap M' = M_{k+1} \cap M' = \dots$ и $\pi(M_k) = \pi(M_{k+1}) = \dots$, где $\pi\colon M \to M/M'$ — естественное отображение, и легко видеть, что отсюда вытекают равенства $M_k = M_{k+1} = \dots$. □

Следствие 1.28. *Модуль над нётеровым кольцом является нётеровым тогда и только тогда, когда он конечно порожден.*

Доказательство. Из предложения 1.27 вытекает, что конечная прямая сумма нётеровых модулей нётерова, так что свободный модуль конечного ранга над нётеровым кольцом нётеров; с другой стороны, всякий конечно порожденный модуль является фактором свободного модуля конечного ранга. □

Спектр

Зададимся следующей задачей: как по данному кольцу A построить такое пространство, чтобы A можно было хотя бы отчасти рассматривать как кольцо функций на нем?

В наших примерах точки пространства находились во взаимно однозначном соответствии с максимальными идеалами кольца функций на этом пространстве, так что можно было бы объявить пространством, соответствующим кольцу, множество его максимальных идеалов. Удобнее, однако (например, по соображениям функториальности) максимальными идеалами не ограничиваться, а рассматривать все простые идеалы кольца:

Определение 1.29. Множество всех простых идеалов кольца A называется его *спектром* и обозначается $\operatorname{Spec} A$.

Сымитируем теперь определение 1.12:

Определение 1.30. Пусть $I \subset A$ — идеал. Положим

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid I \subset \mathfrak{p}\}.$$

Подмножество в $\operatorname{Spec}(A)$ называется *замкнутым*, если оно имеет вид $V(I)$ для некоторого идеала $I \subset A$.

Для замкнутых подмножеств в $\operatorname{Spec} A$ выполняется аналог предложения 1.13:

Предложение 1.31. *Пусть A — кольцо. Тогда:*

(i) *Пустое множество и все множество* $\operatorname{Spec} A$ *являются замкнутыми множествами.*

(ii) *Пересечение любого семейства замкнутых множеств является замкнутым множеством.*

(iii) *Объединение двух замкнутых множеств является замкнутым множеством.*

Доказательство. (i) $V((0)) = \operatorname{Spec} A$, $V(A) = \varnothing$.

(ii) Поскольку любой (не обязательно простой) идеал содержит все идеалы из семейства $\{I_\alpha\}$ тогда и только тогда, когда он содержит $\sum I_\alpha$, имеем $\bigcap V(I_\alpha) = V(\sum I_\alpha)$.

(iii)

Лемма 1.32. *Если $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал и $I_1 I_2 \subset \mathfrak{p}$, то либо $I_1 \subset \mathfrak{p}$, либо $I_2 \subset \mathfrak{p}$.*

Доказательство леммы. Рассуждая от противного, предположим, что ни I_1, ни I_2 в $\mathfrak{p}$ не содержится. Тогда найдутся элементы $f_1 \in I_1 \setminus \mathfrak{p}$, $f_2 \in I_2 \setminus \mathfrak{p}$. Поскольку идеал $\mathfrak{p}$ прост, отсюда следует, что $f_1 f_2 \notin \mathfrak{p}$, но с другой стороны $f_1 f_2 \in I_1 I_2$ — противоречие. $\square$

Поскольку лемму можно переформулировать в виде $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 I_2)$, утверждение (iii) также доказано. $\square$

Из доказанного предложения вытекает, что замкнутые в смысле определения 1.30 подмножества в $\operatorname{Spec} A$ удовлетворяют аксиомам для замкнутых множеств. Топология, возникающая при этом на $\operatorname{Spec} A$, называется *топологией Зарисского.*

Если k — алгебраически замкнутое поле, $Z \subset k^n$ — алгебраическое множество и $A = k[Z]$, то, отождествляя (ввиду следствия 1.17) точки Z с максимальными идеалами в A, получаем вложение $Z \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$. Поскольку $\mathfrak{m}_x \supset I$ тогда и только тогда, когда $x \in V(I)$, получаем, что при таком вложении топология Зарисского на $\operatorname{Spec} A$ индуцирует топологию Зарисского на Z.

Подобно топологии Зарисского на алгебраических множествах, топология Зарисского на спектре кольца обычно не является хаусдорфовой. Однако ее «неклассичность» простирается еще дальше: в спектрах колец встречаются и незамкнутые точки.

Предложение 1.33. *Пусть $\mathfrak{p} \subset \operatorname{Spec} A$ — простой идеал. Тогда замыкание множества $\{\mathfrak{p}\} \subset \operatorname{Spec} A$ совпадает с $V(\mathfrak{p})$; в частности, $\{\mathfrak{p}\}$ замкнуто тогда и только тогда, когда идеал $\mathfrak{p}$ максимален.*

Доказательство. Пусть $I \neq A$ — идеал. Ясно, что $(V(\mathfrak{p}) \subset V(I)) \Leftrightarrow (\mathfrak{p} \supset I)$, так что $V(\mathfrak{p})$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее $\mathfrak{p}$. $\square$

Условимся теперь о некоторых обозначениях.

Точки пространства $\operatorname{Spec} A$ (то есть простые идеал кольца A) будем иногда обозначать буквами латинского алфавита; при этом, если $x \in \operatorname{Spec} A$, то соответствующий простой идеал будем иногда обозначать $\mathfrak{p}_x \subset \operatorname{Spec} A$ — по аналогии с обозначением $\mathfrak{m}_x$ из следствия 1.17 а также с целью избежать записей наподобие $f \in \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Далее, если $f \in A$, то множество простых идеалов, содержащих f, будем обозначать через $V(f)$, вместо более педантичного обозначения $V((f))$. Наконец, множество $\operatorname{Spec} A \setminus V(f)$ будем обозначать $D(f)$; ясно, что это множество открыто в $\operatorname{Spec} A$. Множества вида $D(f)$ будем называть *главными открытыми множествами.*

Предложение 1.34. *Главные открытые множества образуют базу топологии Зарисского.*

Доказательство. Предложение равносильно тому, что всякое замкнутое множество есть пересечение множеств вида $V(f)$, а это очевидно, поскольку $V(I) = \bigcap_{f \in I} V(f)$. $\square$

У предложения 1.34 имеется такое забавное следствие.

Предложение 1.35. *У всякого открытого покрытия пространства* $\operatorname{Spec} A$ *имеется конечное подпокрытие.*

Иными словами, $\operatorname{Spec} A$ всегда является квазикомпактным пространством (приставка «квази» добавляется потому, что нехаусдорфовы пространства компактными называть не принято). Обратите внимание, что никаких условий на кольцо A при этом не накладывается.

Доказательство. Ввиду предложения 1.34 достаточно доказать, что конечное подпокрытие есть у всякого покрытия главными открытыми множествами. Пусть, стало быть, $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{\alpha\in\Sigma} D(f_\alpha)$; это равносильно тому, что $\bigcap_{\alpha\in\Sigma} V(f_\alpha) = \varnothing$, а поскольку всякий нееденичный идеал, отличный от A, содержится хотя бы в одном простом идеале, это, в свою очередь, равносильно тому, что все f_α порождают единичный идеал, то есть что существуют такие $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Sigma$ и $g_1, \dots, g_n \in A$, что

$$g_1 f_{\alpha_1} + \ldots + g_n f_{\alpha_n} = 1.$$

Стало быть, $(f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_n}) = A$, так что $\bigcap_{i=1}^n V(f_{\alpha_i}) = \varnothing$ и $\bigcup_{i=1}^n D(f_{\alpha_i}) = \operatorname{Spec} A$, что и требовалось. $\square$

Продолжим аналогию между спектрами колец и алгебраическими множествами. В предложениях 1.20 и 1.21 мы убедились, что регулярные отображения алгебраических множеств — то же, что направленные в противоположную сторону гомоморфизмы алгебр регулярных функций. В нашей абстрактной ситуации это обстоятельство трансформируется так.

Определение 1.36. Пусть $h\colon A \to B$ — гомоморфизм колец. Тогда *индуцированным отображением спектров* называется отображение $h^*\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$, действующее по правилу $\mathfrak{p} \mapsto h^{-1}(\mathfrak{p})$.

Предложение 1.37. *Если* $h\colon A \to B$ *— гомоморфизм колец, то* $h^*\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ *— непрерывное отображение.*

Доказательство. Если $V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec}(A)$ — замкнутое подмножество, соответствующее идеалу $\mathfrak{a} \subset A$, то, очевидно, $h^{*-1}(V(\mathfrak{a})) = V((h(\mathfrak{a})B))$, где $h(\mathfrak{a})B$ — наименьший идеал в B, содержащий $h(\mathfrak{a})$. Значит, прообразы замкнутых множеств замкнуты. $\square$

Объясним, наконец, в каком смысле элементы кольца A можно рассматривать как функции на $\operatorname{Spec} A$. В нашем модельном примере ($A = k[Z]$, где $Z \subset k^n$ — алгебраическое множество) всякий максимальный идеал имеет вид $\mathfrak{m}_x$, где $x \in Z$ — некоторая точка, а отображение, ставящее в соответствие функции ее значение в точке x, индуцирует изоморфизм $A/\mathfrak{m}_x \xrightarrow{\sim} k$, так что значение функции $f \in A$ в точке x совпадает с ее образом в факторкольце $A/\mathfrak{m}_x$ (являющемся полем). В общем случае будем действовать так. Для всякого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$

обозначим через $k(\mathfrak{p})$ поле частных кольца $A/\mathfrak{p}$ (поскольку $\mathfrak{p}$ не обязательно максимален, само $A/\mathfrak{p}$ быть полем уже не обязано); если теперь $x \in \operatorname{Spec} A$ и $f \in A$, то «значением f в точке x» будем называть образ f при сквозном гомоморфизме

$$A \to A/\mathfrak{p}_x \hookrightarrow k(\mathfrak{p}_x).$$

Это — максимально возможное приближение к тому, что имеет место для колец $k[Z]$. Обратим внимание на следующие обстоятельства:

1) Наши «функции» — ненастоящие: как показывают простейшие примеры, поля $k(\mathfrak{p}_x)$ могут быть неизоморфными при разных x.

2) Тем не менее, $\mathfrak{p}_x = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$, как и в исходном примере.

3) Может случиться так, что $f(x) = 0$ для всех $x \in \operatorname{Spec} A$ (иными словами, f содержится во всех простых идеалах кольца A), но при этом $f \neq 0$. В следующей лекции мы обсудим этот эффект подробнее.