10. Применения к алгебраическим множествам

Лемма о нормализации

Предложение 10.1 (лемма Нётер о нормализации). *Пусть k — поле и $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ — конечно порожденная алгебра над k. Тогда существуют такие алгебраически независимые элементы $y_1, \ldots, y_r \in A$, что A цела над $k[y_1, \ldots, y_r]$.*

(Напомним, что если $y_1, \ldots, y_r$ алгебраически независимы, то $k[y_1, \ldots, y_r]$ изоморфно кольцу многочленов от r переменных)

Доказательство. Если $x_1, \ldots, x_n$ алгебраически независимы, то доказывать нечего. В противном случае имеется соотношение вида

$$\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha = 0, \tag{10.1}$$

где $a_\alpha \in k$ и α пробегает мультииндексы. Положим $y_i = x_i - x_n^{m_i}$, где $m_1, \ldots, m_{n-1}$ — некоторые целые положительные числа, и покажем, что при подходящем выборе m_i кольцо A будем цело над $B = k[y_1, \ldots, y_{n-1}]$. В самом деле, поскольку $x_i = y_i + x_n^{m_i}$, достаточно добиться того, чтобы x_n было цело над B. Подставим $x_i = y_i + x_n^{m_i}$ в (10.1) и раскроем скобки; группируя слагаемые с одинаковыми степенями x_n, получим уравнение на x_n с коэффициентами в B; чтобы при этом получилось желаемое уравнение целой зависимости, достаточно, чтобы старший коэффициент принадлежал k. Заметим, что ненулевое слагаемое вида

$$a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(y_1 + x_n^{m_1})^{\alpha_1} \ldots (y_{n-1} + x_{n-1}^{m_{n-1}})^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n}$$

имеет относительно x_n степень $\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_{n-1}m_{n-1} + \alpha_n$, и нам достаточно добиться, чтобы среди старших членов этих слагаемых не происходило сокращений, а для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы все их степени были различны. Чтобы этого добиться, достаточно положить $(m_1, \ldots, m_{n-1}) = (N^n, N^{n-1}, \ldots, N)$, где N превосходит степень многочлена из левой части (10.1) (воспользуйтесь однозначностью N-ичного представления целого числа).

Если $y_1, \ldots, y_{n-1}$ алгебраически независимы, то все доказано, в противном случае будем итерировать описанную процедуру, пока не дойдем до алгебраически независимого множества $z_1, \ldots, z_m$, где $m < n$. Ввиду транзитивности целой зависимости A будет цело над $k[z_1, \ldots, z_m]$. □

Теорема о нулях

Вот теперь можно доказать теорему 1.10. Напомним формулировку.

Теорема 10.2 (теорема Гильберта о нулях I). *Если k — алгебраически замкнутое поле и $A = k[X_1, \dots, X_n]$ — кольцо многочленов, то всякий максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset A$ имеет вид $\mathfrak{m}_\xi$ для некоторой точки $\xi \in k^n$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что существование такого ξ, что $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_\xi$.

Поскольку факторкольцо $B = A/\mathfrak{m}$ является алгеброй конечного типа над k, к ней применима лемма о нормализации. Следовательно, имеется подкольцо $k[y_1, \dots, y_m] \subset B$ (с алгебраически независимыми $y_1, \dots, y_r$), над которым B цело. Так как $\mathfrak{m}$ максимален, B является полем, откуда по лемме 9.10 кольцо $k[y_1, \dots, y_m]$ — также поле. Поскольку кольцо многочленов от $m > 0$ переменных полем быть не может, $m = 0$ и B цело над k, так что поле B — алгебраическое расширение поля k и тем самым $B = k$, так как k алгебраически замкнуто. В частности, существует изоморфизм $\varphi\colon B \xrightarrow{\sim} k$, тождественный на $k \subset B$. Если положить $\bar{X}_i = X_i \bmod \mathfrak{m}$ и $\xi_i = \varphi(\bar{X}_i) \in k$, то для всякого $f \in \mathfrak{m}$ имеем $f(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) = 0 \Rightarrow f(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$, так что $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_\xi$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. □

Напомним, что в лекции 1 мы вывели из теоремы о нулях, что для всякого алгебраического множества Z отображение $\xi \mapsto \mathfrak{m}_\xi$ задает взаимно однозначное соответствие между точками Z и максимальными идеалами в $k[Z]$ (следствие 1.17).

В лекции 6 мы установили, что для произвольного кольца A соответствие $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$ задает биекцию между радикальными идеалами в A и алгебраическими подмножествами в $\operatorname{Spec}(A)$, и обещали доказать аналогичный результат с заменой A на $k[Z]$ (где k — алгебраически замкнутое поле и $Z \subset k^n$ — алгебраическое множество) и $\operatorname{Spec}(A)$ на Z. Теперь мы можем это обещание выполнить.

Определение 10.3. *Радикалом Джекобсона* кольца A называется пересечение его максимальных идеалов. Обозначение: $R(A)$.

Очевидно, всегда выполняется включение $R(A) \supseteq r(A)$ (где через $r(A)$, как мы помним, обозначается нильрадикал).

Определение 10.4. *Максимальным спектром* кольца A называется множество его максимальных идеалов. Обозначение: $\operatorname{Specm}(A)$.

Предложение 10.5. *Следующие три условия эквивалентны:*

(i) $\operatorname{Specm}(A) \subset \operatorname{Spec}(A)$ *плотно в* $\operatorname{Spec}(A)$*;*

(i′) *Множество замкнутых точек плотно в* $\operatorname{Spec}(A)$.

(ii) *Радикал Джекобсона кольца A совпадает с его нильрадикалом.*

Доказательство. Сразу отметим, что (i) $\Leftrightarrow$ (i′) очевидным образом.

Ясно, что плотность максимального спектра в $\operatorname{Spec}(A)$ равносильна следующему условию:

пусть $\operatorname{Specm}(A) \subset V(\mathfrak{a})$, *где* $\mathfrak{a} \subset A$ *— идеал; тогда* $V(\mathfrak{a}) = \operatorname{Spec}(A)$.

Однако же включение $\operatorname{Specm}(A) \subset V(\mathfrak{a})$ означает, что $\mathfrak{a}$ содержится во всех простых идеалах, т. е. в нильрадикале, а равенство $\operatorname{Spec}(A) = V(\mathfrak{a})$ означает, что $\mathfrak{a}$ содержится во всех максимальных идеалах, т. е. в радикале Джекобсона. $\square$

Предложение 10.6. *Пусть* $i\colon A \hookrightarrow B$ *— целое расширение целостных нётеровых колец. Если* $r(A) = R(A)$, *то* $r(B) = R(B)$.

Доказательство. Ввиду теоремы о подъеме имеем $i^*(\operatorname{Specm}(B)) = \operatorname{Specm}(A)$. Положим $X = \overline{\operatorname{Specm}(B)}$. Поскольку i^* — непрерывное и замкнутое (предложение 9.11) отображение, имеем $i^*(X) = \overline{\operatorname{Specm}(A)} = \operatorname{Spec}(A)$ (поскольку $r(A) = R(A)$). Покажем, что из этого равенства вытекает, что $X = \operatorname{Spec} B$. В самом деле, пусть $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ — разложение на неприводимые. Поскольку $\operatorname{Spec}(A)$ неприводим ввиду целостности кольца A, а отображение i^* замкнуто, из равенства $\operatorname{Spec}(A) = \bigcup_i i^*(X_i)$ вытекает, что $\operatorname{Spec}(A) = i^*(X_j)$ для некоторого j. Пусть $X_j = V(\mathfrak{p})$, где $\mathfrak{p} \subset B$ — простой идеал. Поскольку нулевой идеал $(0) \in \operatorname{Spec}(A)$ лежит в $i^*(X_j)$, имеем $\mathfrak{p} \cap A = (0)$. Поскольку, с другой стороны, кольцо B целостно, то его нулевой идеал также прост и пересечение этого идеала с A также является нулевым идеалом. Ввиду пункта (iv) теоремы о подъеме (теорема 9.8) имеем тогда $\mathfrak{p} = (0)$ и $X_j = V(\mathfrak{p}) = \operatorname{Spec}(B)$. Следовательно, $X = \operatorname{Spec}(B)$. $\square$

Теорема 10.7 (теорема Гильберта о нулях II). *Если* A *— конечно порожденная алгебра над полем и* $\mathfrak{a} \subset A$ *— идеал, то* $r(\mathfrak{a}) = R(\mathfrak{a})$.

Доказательство. Мы приведем доказательство для случая, когда основное поле k алгебраически замкнуто (дополнительные соображения, необходимые для общего случая, будут разбираться на упражнениях).

Поскольку $A/\mathfrak{a}$ — также конечно порожденная алгебра над полем, можно считать, что $\mathfrak{a} = 0$ и доказывать, что $r(A) = R(A)$; так и будем делать.

Заметим теперь, что теорема верна, если $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ — кольцо многочленов. В самом деле, в этом случае она утверждает, что $R(A) = 0$; если многочлен f лежит во всех максимальных идеалах, то, в частности, он лежит во всех идеалах $\mathfrak{m}_\xi$, где $\xi \in k^n$, то есть f является тождественным нулем как функция на k^n, а поскольку поле k, будучи алгебраически замкнутым, бесконечно, отсюда следует, что $k = 0$.

Далее, теорема верна, если A не имеет делителей нуля: достаточно заметить, что по лемме о нормализации у A есть подкольцо A', изоморфное $k[X_1, \ldots, X_n]$, над которым алгебра A цела, и применить предложение 10.6.

В общем случае пусть $\mathrm{Spec}(A) = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ — разложение на неприводимые компоненты, где $X_i = V(\mathfrak{p}_i) \simeq \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p}_i)$, $\mathfrak{p}_i \subset A$ — простые идеалы. Нам надо доказать, что множество замкнутых точек плотно в $\mathrm{Spec}(A)$, а для этого, в свою очередь, достаточно убедиться, что множество замкнутых точек плотно в каждом X_i. Поскольку X_i гомеоморфны спектрам целостных конечно порожденных алгебр над k, это следует из доказанного в предыдущем абзаце. □

Пусть теперь $Z \subset k^n$ — алгебраическое множество (поле k алгебраически замкнуто) и $k[Z]$ — кольцо регулярных функций на X. Напомним, что если $I \subset k[Z]$ — идеал, то через $V(I) \subset Z$ обозначается множество точек, в которых обращаются в нуль все функции из I, и что если $X \subset Z$ — подмножество, то через идеал $I(X) \subset k[Z]$ состоит из функций, тождественно обращающихся в нуль на X.

Предложение 10.8 (теорема Гильберта о нулях III). 1. *Если $X \subset Z$ — подмножество и $I \subset k[Z]$ — идеал, то $V(I(X)) = \bar{X}$ и $I(V(I)) = r(I)$.*

2. *Отображения $X \mapsto I(X)$ и $I \mapsto V(I)$ задают обращающую включения биекцию между множеством замкнутых подмножеств в Z и множеством радикальных идеалов в $k[Z]$.*

Доказательство. Ввиду доказанного в лекции 1, единственное, что нам нужно доказать, — это равенство $I(V(I)) = r(I)$. По теореме о нулях II имеем $r(I) = R(I)$; по теореме о нулях I имеем

$$R(I) = \bigcap_{\mathfrak{m}_\xi \supset I} \mathfrak{m}_\xi = \bigcap_{\xi \in V(I)} \mathfrak{m}_\xi = \{f \mid f(\xi) = 0\ \forall \xi \in V(I)\} = I(V(I)).$$

□

Следствие 10.9. *Отображение $\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p})$ задает взаимно однозначное соответствие между простыми идеалами в $k[Z]$ и замкнутыми неприводимыми подмножествами в Z.*

Размерность

Следующее (общепринятое в алгебраической геометрии) определение размерности алгебраического множества является, по словам Ю. И. Манина, строгой версией определений линии и поверхности из «Начал» Евклида («концы же линии — точки $\langle \ldots \rangle$ концы же поверхности — линии»).

Определение 10.10. Пусть X — неприводимое топологическое пространство. Тогда его *размерностью* называется максимум целых чисел

n, для которых существует цепочка неприводимых замкнутых непустых подмножеств

$$X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n = X,$$

в которой все включения строгие.

Размерностью алгебраического множества X называется максимум размерностей его неприводимых замкнутых подмножеств.

Очевидно, что можно также определить размерность алгебраического множества как максимум размерностей его неприводимых компонент (поскольку всякое неприводимое замкнутое подмножество содержится в какой-нибудь неприводимой компоненте).

Ввиду следствия 10.9 можно перевести это определение на язык простых идеалов в кольце регулярных функций; поскольку простые идеалы есть в любых кольцах, то и определение можно теперь дать для произвольных колец.

Определение 10.11. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в кольце A. Тогда его *высотой* (обозначение: $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$) называется максимум целых чисел n, для которых существует цепочка простых идеалов

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p},$$

в которой все включения строгие.

Размерностью кольца A называется максимум высот его простых идеалов.

Из этого определения, в частности, ясно, что размерность алгебраического множества равна размерности его кольца регулярных функций.

Легко видеть, что размерность всякого поля равна нулю, а размерность всякого кольца главных идеалов равна единице. Размерность локального кольца равна, очевидно, высоте его максимального идеала.

Высота простого идеала или размерность кольца может быть и бесконечна. Тем не менее можно показать (см. главу 11 Атьи и Макдональда), что в нётеровом кольце высота всякого простого идеала конечна, или, что равносильно, размерность всякого нётерова локального кольца конечна. Существуют примеры нётеровых колец бесконечной размерности. Мы, однако, покажем, что размерность кольца регулярных функций всегда конечна.

Предложение 10.12. *Если $A \subset B$ — целое расширение колец, то $\dim A = \dim B$.*

Доказательство. Из пункта (ii) теоремы 9.8 следует, что $\dim B \geqslant \dim A$, а из пункта (iv) той же теоремы — что $\dim B \leqslant \dim A$. $\square$

Найдем размерность кольца многочленов над полем.

Предложение 10.13. *Пусть k — поле. Тогда* $\dim k[X_1, \ldots, X_n] = n$.

Доказательство. Ввиду наличия цепочки простых идеалов

$$(0) \subset (X_1) \subset (X_1, X_2) \ldots \subset \ldots (X_1, \ldots, X_n)$$

ясно, что эта размерность не меньше n; нетривиальным является получение верхней оценки.

Будем доказывать равенство $\dim k[X_1, \ldots, X_n] = n$ индукцией по n, имея в виду, что случаи $n = 0$ и $n = 1$ очевидны см. выше. Пусть для случая менее чем n пересменных все доказано, и предположим, рассуждая от противного, что в $k[X_1, \ldots, X_n]$ существует строго возрастающая цепочка простых идеалов

$$0 = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_{n+1}.$$

Выберем элемент $f \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$ и положим $A = k[X_1, \ldots, X_n]/(f)$. Ясно, что $\dim A \geqslant n$. С другой стороны, A — конечно порожденная алгебра над k, причем ее образующие $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n$ алгебраически зависимы над k (они удовлетворяют соотношению $f(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n) = 0$). Обращаясь к доказательству леммы Нётер о нормализации, получаем, что A содержит подкольцо $k[y_1, \ldots, y_m]$, где $m < n$, $y_1, \ldots, y_m$ алгебраически независимы и A цело над $k[y_1, \ldots, y_m]$. По предположению индукции имеем $\dim k[y_1, \ldots, y_m] = m$; тогда по предложению 10.12 имеем и $\dim A = m < n$ — противоречие. $\square$

Следствие 10.14. *Размерность конечно порожденной алгебру над полем всегда конечна; в частности, размерность алгебраического множества всегда конечна.*

Доказательство. Немедленное следствие из предложения 10.13, леммы Нётер о нормализации и предложения 10.12. $\square$