11. Дискретно нормированные кольца

Определение 11.1. Пусть $A \subset B$ — расширение колец.

Целым замыканием A в B называется множество элементов кольца B, целых над A.

Кольцо A называется *целозамкнутым в* B, если всякий элемент кольца B, целый над A, лежит в A.

Целостное кольцо A называется *целозамкнутым*, если оно целозамкнуто в своем поле частных.

Например, кольцо $\mathbb{Z}$ целозамкнуто. Этот факт изучается в средней школе: рациональный корень многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом единица обязан быть целым числом. При этом в доказательстве используется только однозначность разложения на простые множители. Стало быть,

Предложение 11.2. *Всякое факториальное кольцо целозамкнуто.*

(Обратное неверно; примеры появятся позднее.)

Приведем примеры кольца, не являющегося целозамкнутым. Пусть k — поле, и пусть $\alpha, \beta \in k^n$ — две различные точки. Положим $B = k[X_1, \ldots, X_n]$, и пусть A состоит из тех многочленов $f \in B$, для которых $f(\alpha) = f(\beta)$. Тогда A не является целозамкнутым, поскольку поля частных у A и B совпадают (если φ — ненулевой многочлен, обращающийся в нуль и в α, и в β, то всякая дробь g/h, где $g, h \in B$, равна $g\varphi/h\varphi$), но при этом B цело над A: если f — произвольный многочлен, то $(f - f(a))(f - f(b)) = \varphi \in A$, так что $(f - f(a))(f - f(b)) - \varphi = 0$ — целое уравнение для f над A.

Вот список простых свойств целозамкнутых колец.

Предложение 11.3. 1) *Если A — подкольцо в поле K, то целое замыкание A в K является целозамкнутым кольцом.*

2) *Если A — целозамкнутое кольцо и $S \subset A$ — мультипликативное множество, то $S^{-1}A$ целозамкнуто.*

3) *Если $\{A_\alpha\}$ — произвольное семейство целозамкнутых подколец данного поля K, то $\bigcap_\alpha A_\alpha$ — целозамкнутое кольцо.*

Доказательство. Утверждение (1) сразу следует из транзитивности целой зависимости.

Для доказательства утверждения (2) заметим, что если $x \in K$ цело над $S^{-1}A$, то имеет место равенство

$$x^n + (a_1/s)x^{n-1} + \ldots + (a_n/s),$$

где $a_i \in A$, $s \in S$. Умножая обе части на s^n, находим, что sx цело над A, откуда $sx \in A$ и $x \in S^{-1}A$.

Утверждение (3) — упражнение. $\square$

Понятие целозамкнутого кольца является технически очень важным для геометрии, но понять его геометрический смысл не так просто. Мы начнем с того, что изучим простейший частный случай — так называемые кольца дискретного нормирования.

Определение 11.4. Пусть K — поле. *Дискретным нормированием* на K называется отображение $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $v(x) = \infty$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) ограничение на мультипликативную группу $v|_{K^*}\colon K^* \to \mathbb{Z}$ является ненулевым гомоморфизмом;

3) для любых $x, y \in K$ имеем

$$v(v+y) \geqslant \min(v(x), v(y)).$$

Примеры 11.5. 1) Пусть $K = \mathbb{Q}$ и p — простое число. Если $x \in \mathbb{Q}^*$ имеет вид $p^r m/n$, где m и n взаимно просты с p, то положим $v(x) = r$.

2) Пусть $\mathcal{O}$ — кольцо комплексных степенных рядов вида $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ с положительным радиусом сходимости (т.е. кольцо ростков голоморфных функций от одного переменного) и K — поле частных кольца $\mathcal{O}$ (т.е. поле рядов Лорана с положительным радиусом сходимости и конечной главной частью). Если $f \in K^*$ имеет вид $z^r\varphi$, где φ голоморфна и $\varphi(0) \neq 0$, то положим $v(f) = r$.

Если v — дискретное нормирование на поле K, то положим

$$\mathcal{O}_v = \{x \in K \mid v(x) \geqslant 0\},$$
$$\mathfrak{m}_v = \{x \in K \mid v(x) > 0\}.$$

Из определений ясно, что $\mathcal{O}_v$ — кольцо и $\mathfrak{m}_v$ — идеал в $\mathcal{O}_v$. Поскольку для всякого $x \in \mathcal{O}_v \setminus \mathfrak{m}_v$ имеем $v(x) = v(x^{-1}) = 0$, такой x обратим в $\mathcal{O}_v$. Поэтому $\mathcal{O}_v$ — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}_v$. Ясно также, что K является полем частных кольца $\mathcal{O}_v$.

Предложение 11.6. *Пусть v — дискретное нормирование на поле K. Если $v(x) \neq v(y)$, то $v(x+y) = \min(v(x), v(y))$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $v(y) > v(x)$, так что $v(x) \leqslant v(x+y)$. Заметим теперь, что $2v(-1) = v((-1)^2) = v(1) = 0$, откуда $v(-1) = 0$ и $v(-x) = v(x)$, откуда следует, что

$$v(x) = v((x+y) + (-y)) \geqslant \min(v(x+y), v(-y)) = \min(v(x+y), v(y)).$$

Поскольку $v(x) < v(y)$, отсюда следует, что $v(x) \geqslant v(x+y)$, откуда $v(x) = v(x+y)$. $\square$

Определение 11.7. Целостное кольцо A называется *кольцом дискретного нормирования*, если на его поле частных имеется такое дискретное нормирование v, что $A = \mathcal{O}_v$.

Перечислим несколько простых свойств колец дискретного нормирования.

Предложение 11.8. *Пусть v — дискретное нормирование на поле K и $\mathcal{O}_v \subset K$ — соответствующее кольцо дискретного нормирования с максимальным идеалом $\mathfrak{m}_v$. Тогда:*

(1) *Идеал $\mathfrak{m}_v$ порождается некоторым элементом $\pi \in \mathcal{O}_v$.*

(2) *Всякий ненулевой идеал в $\mathcal{O}_v$ имеет вид (π^r) для некоторого $r \geqslant 0$.*

(3) *Кольцо $\mathcal{O}_v$ нётерово.*

(4) $\dim \mathcal{O}_v = 1$.

(5) *Кольцо $\mathcal{O}_v$ целозамкнуто.*

Доказательство. Поскольку подгруппа $\Gamma = v(K^*) \subset \mathbb{Z}$ отлична от нулевой, она имеет вид $d\mathbb{Z}$, где $d = \min_{x \in K^*} |v(x)|$. Если $v(\pi) = d$, то для всякого $x \in \mathcal{O}_v$ имеем $v(x/\pi) \geqslant 0$, т. е. $x/\pi \in \mathcal{O}_v$; этим доказано утверждение (1).

Если $\mathfrak{a}$ — ненулевой идеал в $\mathcal{O}_v$ и $m = rd$ — наименьшее значение $v(x)$ для $x \in \mathfrak{a}$, достигаемое на элементе $x_0 \in \mathfrak{a}$, то $x_0 = \pi^r u$, где $v(u) = 0$ (т. е. $u \in \mathcal{O}_v^*$); отсюда $\mathfrak{a} = (x_0) = (\pi^r)$, чем доказано (2).

(3) очевидно из (2). Поскольку всякий ненулевой идеал в $\mathcal{O}_v$, отличный от $\mathfrak{m}_v$, имеет вид (π^r), где $r > 1$, такой идеал не является простым, так что единственные простые идеалы в $\mathcal{O}_v$ суть $\mathfrak{m}_v$ и $\{0\}$; этим доказано (4).

Пусть, наконец, $x \in K$ цел над $\mathcal{O}_v$, т. е.

$$x^m = a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m, \tag{11.1}$$

где $v(a_i) \geqslant 0$. Если $v(x) = l < 0$, то значение v на левой части (11.1) равно ml, а на правой части это значение $\geqslant m(l+1)$ ввиду предложения 11.6 — противоречие. Значит, $v(x) \geqslant 0$, чем доказано (5). (Можно было также сослаться на то, что ввиду (4) кольцо $\mathcal{O}_v$ — кольцо главных идеалов.) □

Оказывается, что кольца дискретного нормирования допускают следующую характеризацию.

Предложение 11.9. *Пусть A — нётерово локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов $k = A/\mathfrak{m}$. Предположим, что $\dim A = 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *A целозамкнуто;*

(2) *идеал $\mathfrak{m}$ является главным;*

(2') $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$;

4) *A — кольцо дискретного нормирования.*

Доказательство. Начнем с леммы.

Лемма 11.10. *Пусть A — одномерное целостное нётерово локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Если $\mathfrak{a}$ — ненулевой идеал в A, то $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{a}$ для некоторого $n > 0$.*

Доказательство леммы. Из условия явствует, что в кольце $A/\mathfrak{a}$ единственным простым идеалом является $\bar{\mathfrak{m}}$ — образ идеала $\mathfrak{m}$. Стало быть, $\bar{\mathfrak{m}} = r(A/\mathfrak{a})$. Так как $\mathfrak{m}$ конечно порожден, теперь все следует из предложения 2.10. $\square$

Теперь приступим к доказательству предложения. Импликация (4) $\Rightarrow$ (1) содержится в предложении 11.9, а эквивалентность (2) $\Leftrightarrow$ (2$'$) следует из леммы Накаямы (предложение 4.5), так как размерность векторного пространства — наименьшее число его образующих.

Покажем, что (1) $\Rightarrow$ (2). Обозначим через K поле частных кольца A. Пусть $f \in \mathfrak{m}$ — ненулевой элемент. Так как $\dim A = 1$ и A целостно, $\mathfrak{m}$ является единственным ненулевым простым идеалом, так что $\dim(A/(f)) = 0$, и ввиду леммы $\mathfrak{m}^n \subset (f)$ для некоторого $n > 0$. Выберем наименьшее n с таким свойством, и пусть $g \in \mathfrak{m}^{n-1} \setminus (f)$. Мы покажем, что элемент $f/g \in K$ лежит в A и порождает $\mathfrak{m}$. В самом деле, пусть $x = g/f$. Поскольку $g \in \mathfrak{m}^{n-1}$, имеем $g\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^n \subset fA$, откуда $x\mathfrak{m} \subset A$. Ясно, что $x\mathfrak{m}$ является A-модулем и тем самым идеалом в A. Если этот идеал собственный, то $x\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$; поскольку $\mathfrak{m}$ является, очевидно, точным $A[x]$-модулем, заключаем, что x цело над A и тем самым $x \in A$ ввиду целозамкнутости; стало быть, $g \in (f)$, что противоречит нашему выбору g. Значит, $x\mathfrak{m}$ — несобственный идеал, т. е. $x\mathfrak{m} = A \Rightarrow \mathfrak{m} = x^{-1}A = (f/g)A$.

Остается доказать импликацию (2) $\Rightarrow$ (4). Пусть выполнено (2); обозначим образующую идеала $\mathfrak{m}$ через π (такую образующую иногда называют *локальной униформизующей*). Покажем, что всякий ненулевой идеал $\mathfrak{a} \subset A$ имеет вид $\mathfrak{m}^r = (\pi^r)$ для некоторого $r > 0$. В самом деле, по теореме Крулля (теорема 8.10) имеем $\bigcap_{n \geqslant 1} \mathfrak{m}^n = \{0\}$. Следовательно, существует такое $r > 0$, что $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}^r$, $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{m}^{r+1}$. Пусть $f \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{m}^{r+1}$; тогда $f = u\pi^r$, причем $u \in A \setminus \mathfrak{m}$ (в противном случае было бы $f \in \mathfrak{m}^{r+1}$); стало быть, u — обратимый элемент кольца A, откуда $\pi^r = u^{-1}f \in \mathfrak{a}$, так что и $(\pi^r) \subset \mathfrak{a}$; следовательно, $\mathfrak{a} = (\pi^r)$.

Покажем, далее, что в этих условиях кольцо A целостно. В самом деле, поскольку всякий ненулевой идеал имеет вид (π^r), ни один из этих идеалов, кроме $(\pi) = \mathfrak{m}$, не является простым. С другой стороны, коль скоро $\dim A = 1$, в кольце A должен быть еще хотя бы один простой идеал, и он может быть только нулевым. Значит, нулевой идеал в A прост, что и доказывает целостность кольца A.

Положим теперь, для $f \in A \setminus \{0\}$, $v(f) = \min_{f \in \mathfrak{m}^r} r$ (а также $v(0) = \infty$). По теореме Крулля отображение v определено корректно, и очевидно, что оно удовлетворяет условиям (1)–(3) из определения 11.4. Если продолжить v на все K по правилу $v(f/g) = v(f) - v(g)$, то имеем $v(\pi^r u) = u$, если u — обратимый элемент кольца A. Легко видеть, что так определенное v является дискретным нормированием и что $A = \mathcal{O}_v$. $\square$