2. Локализация

Эта лекция посвящена обобщению понятия поля частных, играющему важную роль в коммутативной алгебре.

Определение и основные свойства

Определение 2.1. Подмножество S кольца A называется *мультипликативным*, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:
1) $1 \in S$;
2) если $s \in S$, $t \in S$, то $st \in S$.

Пусть теперь M — модуль над кольцом A и $S \subset A$ — мультипликативное множество. Определим абелеву группу $S^{-1}M$ следующим образом.

(1) Как множество, $S^{-1}M$ представляет собой фактор множества формальных выражений вида m/s (где $m \in M$, $s \in S$) по следующему отношению эквивалентности:

$$(m_1/s_1 \sim m_2/s_2) \Leftrightarrow (\exists t \in S: \ t(s_2m_1 - s_1m_2) = 0).$$

(2) Если m_1/s_1 и m_2/s_2 — дроби, представляющие два элемента $S^{-1}M$, то их суммой называется элемент, соответствующий дроби $(s_2m_1 + s_1m_2)/s_1s_2$ (как при обычном сложении дробей).

Разумеется, нужно проверить, что определенное нами отношение действительно является отношением эквивалентности, что сложение корректно определено и что относительно так определенного сложения $S^{-1}M$ является абелевой группой (нулем которой является дробь $0/1$); все эти проверки предоставляются читателю. По ходу дела читатель убедится, что при более на первый взгляд естественном определении эквивалентности дробей по правилу $(m_1/s_1 \sim m_2/s_2) \Leftrightarrow s_2m_1 - s_1m_2 = 0$ не удастся доказать транзитивность.

Возьмем, в частности, в качестве A-модуля M само кольцо A. Тогда на A можно определить умножение по правилу

$$(a_1/s_1) \cdot (a_2/s_2) = (a_1a_2)/(s_1s_2);$$

читатель легко убедится, что умножение корректно определено и превращает абелеву группу $S^{-1}A$ в кольцо. Это кольцо называется *кольцом частных A относительно S* или *локализацией A по S*. Далее, если M — модуль над кольцом A, то на абелевой группе $S^{-1}M$ можно ввести структуру $S^{-1}A$-модуля по правилу

$$(a/s) \cdot (m/t) = (am/st)$$

(проверьте корректность). Модуль $S^{-1}M$ также называется *модулем частных M относительно S* или *локализацией M по S*.

Перечислим несколько простых свойств колец и модулей частных; тривиальные доказательства всех этих фактов предоставляются читателю в качестве упражнения.

(1) Элемент $m/s \in S^{-1}M$ равен нулю тогда и только тогда, когда $tm = 0$ для некоторого $t \in S$.

(2) Если A состоит не из одного нуля и $0 \notin S$, то $S^{-1}A$ состоит не из одного нуля.

(3) Отображение $a \mapsto a/1$ задает гомоморфизм $A \to S^{-1}A$ (мы будем называть его каноническим гомоморфизмом).

(4) Если $\varphi\colon M \to N$ — гомоморфизм A-модулей, то

$$\varphi_*\colon m/s \mapsto \varphi(m)/s$$

является гомоморфизмом из $S^{-1}M$ в $S^{-1}N$ (как $S^{-1}A$-модулей).

Следующее ниже универсальное свойство колец частных, доказательство которого также тривиально, уместно выделить в качестве отдельного предложения.

Предложение 2.2. *Пусть A — кольцо, $S \subset A$ — мультипликативное множество и $\varphi\colon A \to S^{-1}A$ — канонический гомоморфизм. Тогда для всякого гомоморфизма колец $\psi\colon A \to B$, обладающего тем свойством, что $\psi(s)$ обратимо в B для всех $s \in S$, существует и единствен гомоморфизм $\eta\colon S^{-1}A \to B$, делающий диаграмму*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & S^{-1}A \arrow[d, dashed, "\eta"] \\ & B \end{tikzcd}$$

коммутативной.

Говоря неформально, $S^{-1}A$ — наименьшее расширение кольца A, в котором все элементы множества S становятся обратимыми; если у A нет делителей нуля, эти слова можно понимать буквально, но в общем случае — нет, поскольку кое-что при этом «расширении» может понадобиться отправить в нуль; формулировка предложения 2.2 представляет собой корректное уточнение слов о наименьшем расширении, которое годится и в общем случае.

Еще одно хорошее свойство операции локализации состоит в том, что она сохраняет нётеровость:

Предложение 2.3. *Если M — нётеров модуль над кольцом A и $S \subset A$ — мультипликативное множество, то $S^{-1}M$ — нётеров модуль над кольцом $S^{-1}A$.*

Доказательство. Начнем с леммы, которая понадобится нам и в дальнейшем.

Лемма 2.4. *Пусть M — модуль над кольцом A и $S \subset A$ — мультипликативное множество. Гомоморфизм (абелевых групп) $M \to S^{-1}M$, заданный по правилу $m \mapsto m/1$, обозначим через φ.*

(1) *Если $P \subset M$ — подмодуль (над A), то $S^{-1}A \cdot \varphi(P)$ (то есть $S^{-1}A$-подмодуль в $S^{-1}M$, порожденный подгруппой $\varphi(P)$) изоморфен $S^{-1}P$.*

(2) *Если N — $S^{-1}A$-подмодуль в $S^{-1}M$, то $\varphi^{-1}(N)$ является A-подмодулем в N и N порожден (как $S^{-1}A$-модуль) своей абелевой подгруппой $\varphi(\varphi^{-1}(N))$.*

Доказательство леммы. (1) Определим гомоморфизм из $S^{-1}P$ в $S^{-1}A\cdot \varphi(P)$ по правилу $p/s \mapsto s^{-1} \cdot (p/1)$; поскольку всякий элемент $S^{-1}A$-модуля $S^{-1}A\cdot\varphi(P)$ имеет вид p/s, где $p \in P$, $s \in S$ (приведите к общему знаменателю), этот гомоморфизм сюръективен, а его инъективность очевидна.

(2) Если $m/1 \in N$, то и $(a/1)(m/1) = am/1 \in N$, так что $\varphi^{-1}(N)$ является A-подмодулем в N; далее, если $m/s \in N$, то $m/1 = (s/1)(m/s) \in N$, так что $m \in \varphi^{-1}(N)$, и $m = (1/s)(m/1)$, откуда вытекает, что N содержится в подмодуле, порожденном $\varphi(\varphi^{-1}(N))$; обратное включение очевидно. $\square$

Пусть теперь $N_1 \subset N_2 \subset \dots$ — возрастающая цепочка подмодулей в $S^{-1}M$. Тогда цепочка подмодулей $\varphi^{-1}(N_1) \subset \varphi^{-1}(N_2) \subset \dots$ в M стабилизируется ввиду нётеровости M, так что стабилизируется и цепочка подгрупп $\varphi(\varphi^{-1}(N_1)) \subset \varphi(\varphi^{-1}(N_2)) \subset \dots$ в $S^{-1}M$; поскольку $\varphi(\varphi^{-1}(N_i))$ порождает N_i как $S^{-1}A$-модуль, цепочка $N_1 \subset N_2 \subset \dots$ также стабилизируется. $\square$

Следствие 2.5. *Если A — нётерово кольцо и $S \subset A$ — мультипликативное множество, то кольцо $S^{-1}A$ тоже нётерово.*

Вот еще одно общее свойство операции локализации:

Предложение 2.6. *Пусть $S \subset A$ — мультипликативное множество, и пусть последовательность A-модулей*

$$E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3$$

точна. Тогда последовательность

$$S^{-1}E_1 \xrightarrow{\alpha_*} S^{-1}E_2 \xrightarrow{\beta_*} S^{-1}E_3$$

также точна.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\operatorname{Ker}\beta_* \subset \operatorname{Im}\alpha_*$. В самом деле, пусть $\beta_*(m/s) = 0$. Это значит, что $t\beta(m) = 0$ для некоторого $t \in S$; стало быть, $\beta(tm) = 0$ и $tm = \alpha(m')$ для некоторого $m' \in E_1$. Отсюда $m/s = tm/st = \alpha_*(m'/st)$, что и требовалось. □

Неформально результат предложения 2.6 можно записать в виде формулы $S^{-1}(M/M') \simeq S^{-1}M/S^{-1}M'$ («локализация коммутирует с факторизацией»).

Примеры

Если A — целостное кольцо и $S = A \setminus \{0\}$, то $S^{-1}A$ — не что иное, как поле частных кольца A. Для произвольного мультипликативного $S \subset A \setminus \{0\}$ кольцо $S^{-1}A$ будет в этой ситуации подкольцом в поле частных кольца A; стало быть, *всякая (ненулевая) локализация целостного кольца является целостным кольцом.*

Пусть $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал. Тогда множество $S = A \setminus \mathfrak{p}$ мультипликативно; кольцо частных $S^{-1}A$ обозначают через $A_\mathfrak{p}$ и называют *локализацией кольца A относительно простого идеала* $\mathfrak{p}$.

Применяя предложение 2.6 к точной последовательности

$$0 \to \mathfrak{p} \to A \to A/\mathfrak{p} \to 0$$

и мультипликативному множеству $S = A \setminus \mathfrak{p}$, получаем, что поле $k(\mathfrak{p})$ (поле частных кольца $A/\mathfrak{p}$) изоморфно факторкольцу $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ (где $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ — идеал, порожденный образом $\mathfrak{p}$ в $A_\mathfrak{p}$).

Пусть, наконец, $f \in A$ — произвольный элемент и $S \subset A$ — множество, состоящее из единицы и всех положительных степеней элемента f; кольцо частных $S^{-1}A$ обозначают через A_f.

Кольцо A_f изоморфно факторкольцу $A[T]/(fT-1)$: это немедленно следует, например, из описания колец частных, данного в предложении 2.2, поскольку $A[T]/(fT-1)$ обладает, очевидно, тем же универсальным свойством, что и A_f.

Кольцо A_f является нулевым в том и только том случае, когда $f^n = 0$ для некоторого $n > 0$ (элементы f, обладающие этим свойством, называются нильпотентными).

Локализация и простые идеалы

Предложение 2.7. *Пусть S — мультипликативное подмножество в кольце A и $\varphi\colon A \to S^{-1}A$ — канонический гомоморфизм. Тогда:*

(1) *Отображение $\varphi^*\colon \mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ задает биекцию между множеством всех простых идеалов кольца $S^{-1}A$ и множеством простых идеалов кольца A, не пересекающихся с S.*

(2) *Если отождествить* $\operatorname{Spec}(S^{-1}A)$ *с его образом в* $\operatorname{Spec}(A)$ *при этом отображении, то топология Зарисского на* $\operatorname{Spec}(S^{-1}A)$ *будет индуцирована топологией Зарисского на* $\operatorname{Spec}(A)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a}$ — произвольный идеал в $S^{-1}A$. Лемма 2.4 (для случая $M = A$) показывает, что $\mathfrak{a}$ как идеал в $S^{-1}A$ порожден множеством $\varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$, так что отображение $\mathfrak{a} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ инъективно (на множестве вообще всех идеалов, а не только простых), причем если $\mathfrak{a}$ — собственный идеал в $S^{-1}A$, то $\varphi^{-1}(A) \cap S = \varnothing$. Далее, пусть $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал, не пересекающийся с S, и обозначим через $\mathfrak{q}$ идеал $\varphi(\mathfrak{p}) \cdot S^{-1}A$ (т.е. идеал в A, порожденный $\varphi(\mathfrak{p})$). Покажем, что $\mathfrak{q}$ — простой идеал и что $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. В самом деле, ввиду леммы 2.4 имеем $\mathfrak{q} \simeq S^{-1}\mathfrak{p}$; поскольку последовательность

$$0 \to \mathfrak{p} \to A \to A/\mathfrak{p} \to 0$$

точна, предложение 2.6 показывает, что точна и последовательность

$$0 \to \mathfrak{q} \to S^{-1}A \to S^{-1}(A/\mathfrak{p}) \to 0,$$

так что $(S^{-1}A)/\mathfrak{q} \simeq S^{-1}(A/\mathfrak{p})$. Поскольку $\mathfrak{p}$ — простой идеал, кольцо $A/\mathfrak{p}$ целостно; значит, целостно и кольцо $A/\mathfrak{q}$, являющееся его локализацией, так что идеал $\mathfrak{q}$ прост.

Если $f \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, то $f/1 = f'/s$, где $f' \in \mathfrak{p}$, $s \in S$, откуда $t(sf - f') = 0$ для некоторого $t \in S$. Поскольку $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$, имеем $t \notin \mathfrak{p}$, откуда $sf - f' = f'' \in \mathfrak{p}$. Следовательно, $sf \in \mathfrak{p}$ и тем самым $f \in \mathfrak{p}$ (так как $s \notin \mathfrak{p}$); значит, $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ и первая часть предложения доказана.

Пусть, наконец, $f/s \in S^{-1}A$. Из наших рассмотрений вытекает, что простой идеал $\mathfrak{q} \subset S^{-1}A$ (с неизбежностью имеющий вид $S^{-1}\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$)содержит f/s тогда и только тогда, когда идеал $\mathfrak{p}$ содержит f. Стало быть, образ главного открытого множества $D(f/s) \subset \operatorname{Spec}(S^{-1}A)$ есть $D(f) \cap \varphi^*(\operatorname{Spec} A)$, чем доказано утверждение о топологиях (напомним, что главные открытые множества составляют базу топологии Spec'а). $\square$

Если, в условиях этого предложения, $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A, то идеал $\varphi(\mathfrak{p})A_{\mathfrak{p}}$ мы будем обозначать $S^{-1}\mathfrak{p}$ (благо, как мы видели, он действительно изоморфен такому $S^{-1}A$-модулю).

Отметим, что из доказанного предложения, примененного к A_f, вытекает, что $D(f) \subset \operatorname{Spec}(A)$ гомеоморфно $\operatorname{Spec}(A_f)$.

Вот полезное приложение предложения 2.7.

Предложение 2.8. *Пусть A — кольцо. Элемент $f \in A$ нильпотентен тогда и только тогда, когда он содержится во всех простых идеалах кольца A.*

(Напомним, что элемент кольца называется нильпотентным, если какая-то его положительная степень равна нулю.)

Доказательство. Если $f^n = 0$, то для всякого простого $\mathfrak{p} \subset A$ имеем $f^n \in \mathfrak{p}$, откуда $f \in \mathfrak{p}$.

Если, напротив, f нильпотентным не является, то кольцо A_f ненулевое и содержит хотя бы один простой идеал; ввиду предложения 2.7 прообраз этого идеала в A есть простой идеал, не содержащий f. $\square$

Следствие 2.9. *Пусть $\mathfrak{a} \subset A$ — идеал. Тогда*

$$\{f \in A \mid \exists n : \ f^n \in \mathfrak{a}\} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a} \\ \mathfrak{p} \text{ прост}}} \mathfrak{p}.$$

Доказательство. Примените предложение 2.8 к кольцу $A/\mathfrak{a}$. $\square$

Идеал, о котором идет речь в следствии 2.9 (пересечение всех простых идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$), называется *нильрадикалом* (или просто радикалом) идеала $\mathfrak{a}$ и обозначается $r(\mathfrak{a})$. Нильрадикал нулевого идеала кольца A (т.е. множество всех нильпотентных элементов, оно же пересечение всех простых идеалов) называется *нильрадикалом* (или просто радикалом) кольца A и обозначается $r(A)$ (несмотря на непоследовательность терминологии и обозначений).

Предложение 2.10. *Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — идеал в нётеровом кольце A. Тогда $\mathfrak{b} \subset r(\mathfrak{a})$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{b}^n \subset \mathfrak{a}$ для некоторого $n > 0$.*

(Напомним, что $\mathfrak{b}^n$ — идеал, порожденный всевозможными произведениями n элементов идеала $\mathfrak{b}$.)

Доказательство. Достаточно показать, что $r(\mathfrak{a})^n \subset \mathfrak{a}$ для некоторого n. Если идеал $r(\mathfrak{a})$ порожден k элементами и если каждый из этих элементов в степени l лежит в идеала $\mathfrak{a}$, то можно, очевидно, положить $n = kl + 1$. $\square$