5. Приложение: структура проективных модулей

Мы видели, что некоторые свойства модулей (например, состоять только из нуля) являются «локальными»: они выполнены для модуля тогда и только тогда, когда они имеют место для его локализаций во всех точках спектра. На этой лекции мы выясним, что, хотя свойство «быть свободным модулем» локальным и не является, можно дать описание локально свободных модулей в глобальных терминах.

Определения

Определение 5.1. Модуль P над кольцом A называется *проективным*, если для всякого сюръективного гомоморфизма $\pi\colon M \to N$ и всякого гомоморфизма $f\colon P \to N$ существует гомоморфизм $g\colon P \to M$, для которого $\pi \circ g = f$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "g"'] \\ M \arrow[r, two heads, "\pi"'] & N. \end{tikzcd}$$

Пример 5.2. Всякий свободный модуль проективен. В самом деле, если $\{e_i\}$ — базис модуля P и $f(e_i) = n_i$, то ввиду сюръективности π существуют такие $m_i \in M$, что $\pi(m_i) = n_i$, и можно положить $g(e_i) = m_i$.

Предложение 5.3. *Модуль P является проективным тогда и только тогда, когда существует такой модуль Q, что прямая сумма $P \oplus Q$ — свободный модуль.*

Доказательство. Пусть модуль P проективен, и пусть $\pi\colon F \twoheadrightarrow P$ — сюръекция, причем модуль F свободен. Из определения 5.1 (в котором положено $M := F, f := \mathrm{id}$) следует, что существует гомоморфизм $g\colon P \to F$, для которого $\pi \circ g = \mathrm{id}_P$. Отсюда, как известно, немедленно следует, что $P \oplus \mathrm{Ker}(\pi) \simeq F$.

Обратно, пусть $F \simeq P \oplus Q$ — свободный модуль. Тогда существуют проектия $p\colon F \to P$ и «сечение» $s\colon P \to F$, для которых $p \circ s = \mathrm{id}_P$. Если мы находимся в условиях определения 5.1, то (ввиду того, что свободные модули проективны) существует гомоморфизм $\tilde{g}\colon F \to M$, для которого $\pi \circ \tilde{g} = f \circ \mathfrak{p}$; если теперь положить $g = \tilde{g} \circ s$, то

$$\pi \circ g = \pi \circ \tilde{g} \circ s = f \circ p \circ s = f \circ \mathrm{id}_P = f.$$

$\square$

Следствие 5.4. *Если $S \subset A$ — мультипликативное подмножество и P — проективный A-модуль, то $S^{-1}P$ — проективный $S^{-1}A$-модуль.*

Доказательство. Если $P \oplus Q = F$ — свободный A-модуль, то $S^{-1}P \oplus S^{-1}Q = S^{-1}F$, и $S^{-1}F$ — свободный $S^{-1}A$-модуль. $\square$

Из доказанного критерия ясно, что далеко не всякий модуль является проективным: если, например, A — целостное кольцо, то никакой модуль с ненулевым аннулятором (например, $A/\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}$ — ненулевой собственный идеал) нельзя даже вложить в свободный A-модуль, так что проективным такой модуль заведомо не будет

Проективные модули, не являющиеся свободными, действительно существуют. Простейший (хотя и не очень показательный) пример: пусть p и q — взаимно простые целые числа и $n = pq$. Тогда $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ не является свободным модулем над кольцом $Z/n\mathbb{Z}$, но этот модуль, бесспорно, проективен, так как $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Пример более содержательный: пусть X — компактное хаусдорфово пространство, A — кольцо непрерывных (скажем, вещественнозначных) функций на X и E — (вещественное) векторное расслоение на X. Если обозначить через M_E множество сечений расслоения E, то M_E является A-модулем; несложно прповерить, что этот модуль свободен тогда и только тогда, когда расслоение E тривиально. Поскольку, как известно, для всякого векторного расслоения E существует такое расслоение E', что $E \oplus E'$ тривиально, модуль $M_E \oplus M_{E'}$ свободен, так что модуль M_E проективен, и если расслоение E нетривиально, то модуль M_E проективен, но не свободен. Другие (более алгебраические) примеры появятся у нас позже.

Функтор Hom

Если M и N — модули над кольцом A, то через $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ обозначается множество гомоморфизмов из M в N. Это множество обладает структурой абелевой группы (если $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, то $\varphi + \psi \colon m \mapsto \varphi(m) + \psi(m)$) и, более того, A-модуля (если $a \in A$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, то $a\varphi \colon m \mapsto a \cdot \varphi(m)$; при проверке того, что $a\varphi$ — действительно гомоморфизм A-модулей, приходится использовать коммутативность кольца A).

Если M, M', N и N' — модули над A, то всякий гомоморфизм $g \colon N \to N'$ индуцирует гомоморфизм (A-модулей) $\mathrm{Hom}(1,g) \colon \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N')$, действующий по правилу $\varphi \mapsto g \circ \varphi$, и всякий гомоморфизм $h \colon M \to M'$ индуцирует гомоморфизм $\mathrm{Hom}(h,1) \colon \mathrm{Hom}(M',N) \to \mathrm{Hom}(M,N)$, действующий по правилу $\varphi \mapsto \varphi \circ h$.

Предложение 5.5 (точность слева функтора Hom). *Если*

$$0 \to N'' \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} N'$$

— *точная последовательность A-модулей, то для всякого A-модуля M точна последовательность*

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(M, N'') \xrightarrow{\operatorname{Hom}(1,\alpha)} \operatorname{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(1,\beta)} \operatorname{Hom}_A(M, N').$$

Если

$$M'' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M' \to 0 \tag{5.1}$$

— *точная последовательность A-модулей, то для всякого A-модуля N точна последовательность*

$$0 \to \operatorname{Hom}(M', N) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(\beta,1)} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(\alpha,1)} \operatorname{Hom}(M'', N).$$

Доказательство. Докажем, например, точность в члене $\operatorname{Hom}(M, N)$ во второй из этих последовательностей. Пусть $\varphi\colon M \to N$ и $\operatorname{Hom}(\alpha, 1)(\varphi) = 0$. По определению это означает, что $\varphi \circ \alpha = 0$, то есть что φ является тождественным нулем на $\operatorname{Im}(\alpha) = \operatorname{Ker}(\beta)$ (мы воспользовались точностью последовательности (5.1)). Следовательно, гомоморфизм $\psi\colon M' \to N$, заданный по правилу $m' \mapsto \varphi(m)$, где $\beta(m) = m'$, корректно определен, и имеем $\psi \circ \beta = \operatorname{Hom}(\beta, 1)(\psi) = \varphi$. □

Существенно, что предложение 5.5 нельзя усилить: если $E_1 \to E_2 \to E_3$ — точная последовательность, то неверно ни то, что для произвольного M точна последовательность

$$\operatorname{Hom}_A(M, E_1) \to \operatorname{Hom}_A(M, E_2) \to \operatorname{Hom}_A(M, E_3),$$

ни то, что для произвольного N точна последовательность

$$\operatorname{Hom}_A(E_3, N) \to \operatorname{Hom}_A((E_2, N) \to \operatorname{Hom}_A(E_1, N).$$

В самом деле, условие, что из точности последовательности $E_1 \to E_2 \to 0$ вытекает точность последовательности $\operatorname{Hom}_A(M, E_1) \to \operatorname{Hom}_A(M, E_2) \to 0$, означает, по точному смыслу определения 5.1, что модуль M проективен, а не всякий модуль является проективным.

Модули I, обладающие тем свойством, что для всякой точной последовательность $0 \to E_1 \to E_2$ последовательность $\operatorname{Hom}(E_2, I) \to \operatorname{Hom}(E_1, I) \to 0$ также точна, называются инъективными; в нашем курсе речи о них не будет.

Нам понадобится один результат о связи операции Hom с локализацией. Именно, пусть S — мультипликативное подмножество в кольце A, и пусть M и N — модули над A. Определим гомоморфизм $S^{-1}A$-модулей

$$\varphi\colon S^{-1} \operatorname{Hom}_A(M, N) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) \tag{5.2}$$

следующим образом: если $h \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$, и $s \in S$, то гомоморфизм h/s переводит элемент m/t, где $m \in M$, $t \in S$, в $h(m)/st$ (корректность определения и гомоморфность отображения φ проверяются тривиально).

В общем случае гомоморфизм φ не является ни инъективным, ни сюръективным. Тем не менее имеет место следующий факт:

Предложение 5.6. *Если A — нётерово кольцо, M — конечно порожденный A-модуль и $S \subset A$ — мультипликативное множество, то гомоморфизм* (5.2) *является изоморфизмом.*

Доказательство. Покажем, во-первых, что φ инъективен, если M конечно порожден. В самом деле, пусть $h/s \in S^{-1}\operatorname{Hom}_A(M,N)$, и пусть $\varphi(h/s) = 0$. Если M порожден элементами $m_1, \ldots, m_k$, то $S^{-1}M$ порожден элементами $m_1/1, \ldots m_k/1$, так что равенство $\varphi(h/s) = 0$ означает, что $h(m_1)/s = \ldots = h(m_i)/s = 0$. Следовательно, существуют элементы $t_1, \ldots, t_k \in S$, для которых $t_i h(m_i) = 0$. Положим $t = t_1 \ldots t_k \in S$; тогда $th(m_i) = 0$ для всех i, так что гомоморфизм $th \in \operatorname{Hom}_A(M,N)$ является нулевым, откуда $h/s = 0$. (Заметим, что нётеровость кольца A в этом рассуждении не использовалась.)

Далее, покажем, что гомоморфизм (5.2) является изоморфизмом в случае, когда M — свободный A-модуль конечного ранга. Его инъективность была установлена выше; для доказательства сюръективности предположим, что ранг модуля M равен r; тогда $S^{-1}M$ — свободный $S^{-1}A$-модуль ранга r, и задать гомоморфизм из него в $S^{-1}N$ — все равно, что задать r элементов модуля $S^{-1}N$ (образы базисных элементов). Приводя к общему знаменателю, можно считать, что эти элементы имеют вид $n_1/s, \ldots, n_r/s$, где $n_i \in N$, $s \in S$; теперь ясно, что этот гомоморфизм равен $\varphi(h/s)$, где $h\colon M \to N$ — гомоморфизм, переводящий i-й элемент базиса в n_i. (Нётеровость опять не использовалась.)

Пусть, наконец, M — конечно порожденный модуль над нётеровым кольцом A. Поскольку M конечно порожден, существует сюръективный гомоморфизм $\alpha\colon F \to M$, где F — свободный A-модуль конечного ранга. Поскольку ввиду нётеровости модуль $\operatorname{Ker}(\alpha)$ также конечно порожден, существует сюръективный гомоморфизм $\beta\colon F_2 \to \operatorname{Ker}(\alpha)$, где F_2 — также свободный A-модуль конечного ранга. Стало быть, имеется точная последовательность

$$F_2 \to F_1 \to M \to 0;$$

ввиду предложения 5.5 точна последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(M,N) \to \operatorname{Hom}_A(F_1,N) \to \operatorname{Hom}_A(F_2,N); \tag{5.3}$$

далее, ввиду предложения 2.6 точна последовательность

$$S^{-1}F_2 \to S^{-1}F_1 \to S^{-1}M \to 0,$$

так что (опять-таки ввиду предложения 5.5) точна последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}F_1, S^{-1}N) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}F_2, S^{-1}N). \tag{5.4}$$

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S^{-1}\operatorname{Hom}_A(M,N) \arrow[r] \arrow[d] & S^{-1}\operatorname{Hom}_A(F_1,N) \arrow[r] \arrow[d] & S^{-1}\operatorname{Hom}_A(F_2,N) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M,S^{-1}N) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}F_1,S^{-1}N) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}F_2,S^{-1}N),
\end{tikzcd}$$

в которой верхняя строка получается применением S^{-1} к точной последовательности (5.3) (и тем самым эта строка точна), нижняя строка есть последовательность (5.4), а вертикальные стрелки суть гомоморфизмы вида φ. Нам нужно только проверить сюръективность левой вертикальной стрелки; поскольку обе строки точны, а средняя и правая вертикальные стрелки являются изоморфизмами по доказанному выше, эта сюръективность проверяется тривиально (никакой специфики модулей, участвующих в диаграмме, использовать при этом не надо). $\square$

Основная теорема

Теорема 5.7. *Пусть M — конечно порожденный модуль над нётеровым кольцом A. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

(i) *M проективен;*

(ii) *для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ модуль $M_{\mathfrak{p}}$ является свободным $A_{\mathfrak{p}}$-модулем;*

(iii) *Существует такое семейство элементов $f_i \in A$, что $\operatorname{Spec}(A) = \bigcup D(f_i)$ и M_{f_i} является свободным A_{f_i}-модулем для всякого i.*

Доказательство. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) немедленно следует из предложения 4.12.

Для доказательства импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) заметим, что если M — проективный A-модуль, то $M_{\mathfrak{p}}$ — проективный $A_{\mathfrak{p}}$-модуль (следствие 5.4). Поэтому (i) $\Rightarrow$ (ii) вытекает из следующего предложения:

Предложение 5.8. *Всякий конечно порожденный проективный модуль над нётеровым локальным кольцом является свободным.*

Доказательство предложения 5.8. Пусть M — конечно порожденный проективный модуль над нётеровым локальным кольцом A, и пусть $\mathfrak{m} \subset A$ — максимальный идеал и $k = A/\mathfrak{m}$ — поле вычетов. Модуль $M/\mathfrak{m}M \cong M \otimes_A k$ является k-модулем, то есть векторным пространством над k (расширение скаляров!). Пусть $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ — базис этого векторного пространства, и пусть $e_i \in M$ таковы, что $\bar{e}_i$ — образ e_i в $M/\mathfrak{m}M$ для всех i. По лемме Накаямы (предложение 4.5) элементы $e_1, \ldots, e_r$ порождают модуль M; поэтому, если обозначить через $\varphi\colon A^r \to M$ гомоморфизм, переводящий i-й базисный вектор в e_i, то этот гомоморфизм будет сюръективен. Рассуждая так же, как в доказательстве предложения 5.3, получаем, что из проективности модуля M вытекает, что $A^r \simeq M \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$, причем при этом отождествлении гомоморфизм φ совпадает с проекцией прямой суммы на первое слагаемое. Следовательно (см. предложение 3.5), $A^r \otimes k \simeq (M \otimes k) \oplus (\mathrm{Ker}(\varphi) \otimes k)$, причем при этом отождествлении гомоморфизм $\varphi \otimes 1$ совпадает с проекцией прямой суммы на первое слагаемое. Поскольку, однако, $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ — базис в $M \otimes k$, гомоморфизм $\varphi \otimes 1$ является изоморфизмом, так что второе слагаемое $\mathrm{Ker}(\varphi) \otimes k = \mathrm{Ker}(\varphi)/\mathfrak{m}\,\mathrm{Ker}(\varphi)$ равно нулю; поскольку ввиду нётеровости модуль $\mathrm{Ker}(\varphi)$ к тому же конечно порожден, из леммы Накаямы вытекает, что он нулевой, т.е. φ — изоморфизм и M изоморфен свободному модулю A^r. $\square$

Докажем, наконец, импликацию (iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть выполнено (iii), и пусть $L \to N$ — сюръективный гомоморфизм A-модулей. Нам надо доказать сюръективность индуцированного гомоморфизма $\mathrm{Hom}_A(M, L) \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Ввиду следствия 4.9 достаточно показать, что для всякого f_i сюръективен гомоморфизм $\mathrm{Hom}_A(M, L)_{f_i} \to \mathrm{Hom}_A(M, N)_{f_i}$; из предложения 5.6 вытекает, что каждый такой гомоморфизм совпадает с гомоморфизмом $\mathrm{Hom}_{A_{f_i}}(M_{f_i}, L_{f_i}) \to \mathrm{Hom}_{A_{f_i}}(M_{f_i}, N_{f_i})$. Поскольку модули M_{f_i} являются по условию свободными и тем самым проективными, а гомоморфизмы $L_{f_i} \to N_{f_i}$ сюръективны ввиду точности операции локализации, искомая сюръективность очевидна. $\square$