6. Разложение радикальных идеалов

На протяжении ближайших нескольких лекций речь у нас пойдет о теории, являющейся далеким и непрямым обобщением теоремы об однозначном разложении целых чисел на простые множители.

Чтобы получить содержательные результаты, нам придется наложить условия нётеровости, но несколько первых шагов можно сделать и без всяких ограничений.

Определение 6.1. Идеал $\mathfrak{a}$ в кольце A называется *радикальным*, если он совпадает со своим нильрадикалом (т. е. если из $f \in A$ и $f^n \in \mathfrak{a}$ для некоторого $n > 0$ вытекает, что $f \in \mathfrak{a}$).

Пример 6.2. Пусть k — алгебраически замкнутое поле, $Z \subset k^n$ — алгебраическое множество и $Y \subset Z$. Тогда идеал $I(Y) \subset k[Z]$, состоящий из регулярных функций, тождественно обращающихся в нуль на Y, является радикальным: если $(f(y))^n = 0$, то и $f(y) = 0$.

Когда мы докажем теорему Гильберта о нулях, мы увидим, что *всякий* радикальный идеал в $k[Z]$ имеет такой вид, как в этом примере, и что радикальных идеалов в $k[Z]$ столько же, сколько замкнутых подмножеств в Z; а пока что давайте проведем аналогичную конструкцию в абстрактной ситуации.

Предложение 6.3. *Пусть A — произвольное кольцо. Тогда отображение $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$ задает обращающее включения взаимно однозначное соответствие между замкнутыми подмножествами в* $\operatorname{Spec}(A)$ *и радикальными идеалами в A. При этом соответствии конечному объединению замкнутых подмножеств соответствует конечное пересечение радикальных идеалов.*

Доказательство. Пусть замкнутое подмножество имеет вид $X = V(I)$, где $I \subset A$ — идеал, и пусть $\mathfrak{a} = r(I)$. Ввиду следствия 2.9 простой идеал $\mathfrak{p} \subset A$ содержит I тогда и только тогда, когда он содержит $\mathfrak{a}$, так что $X = V(\mathfrak{a})$; поскольку, очевидно, $r(r(I)) = I$, идеал $\mathfrak{a}$ радикален, так что отображение $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$ сюръективно. С другой стороны, если $\mathfrak{a}$ — радикальный идеал, то

$$\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a} \\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}, \tag{6.1}$$

так что $\mathfrak{a}$ восстанавливается по $V(\mathfrak{a})$ и наше отображение инъективно. Утверждение об обращении включений очевидно. Если, наконец, $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$ — радикальные идеалы, то $V(\mathfrak{a}_1) \cup V(\mathfrak{a}_2) = V(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)$ (см. лемму 1.32); из тривиально проверяемой формулы $r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$ следует, что это множество равно $V(r(\mathfrak{a}_1) \cap r(\mathfrak{a}_2)) = V(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)$. $\square$

Если $X \subset \operatorname{Spec}(A)$ — замкнутое подмножество, то через $I(X)$ будем обозначать тот радикальный идеал $\mathfrak{a} \subset A$, для которого $X = V(\mathfrak{a})$; это не что иное, как пересечение всех простых идеалов, соответствующих точкам из X (см. (6.1)), то есть пересечение всех простых идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$, то есть $r(\mathfrak{a})$.

Из всех радикальных идеалов проще всего устроены идеалы простые. Замкнутые подмножества спектров колец, соответствующие простым идеалам, можно охарактеризовать в геометрических терминах.

Предложение-определение 6.4. *Топологическое пространство X называется неприводимым, если оно удовлетворяет одному из двух следующих эквивалентных условий:*

(i) *X нельзя представить в виде объединения двух собственных замкнутых подмножеств;*

(ii) *Всякое непустое открытое подмножество $U \subset X$ плотно в X.*

Легко видеть, что хаусдорфово пространство, содержащее более одной точки, неприводимым не является.

Предложение 6.5. *Замкнутое подмножество $X \subset \operatorname{Spec}(A)$ неприводимо тогда и только тогда, когда оно имеет вид $V(\mathfrak{p})$, где $\mathfrak{p}$ — простой идеал.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a}$ — радикальный идеал и $X = V(\mathfrak{a}) = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 —- строго меньшие замкнутые подмножества. Тогда ввиду предложения 6.3 существуют элементы $f_1 \in I(X_1) \setminus \mathfrak{a}$ и $f_2 \in I(X_2) \setminus \mathfrak{a}$; поскольку всякий $\mathfrak{p} \in X$ лежит в X_1 или X_2, произведение $f_1 f_2$ принадлежит всем этим простым идеалам и тем самым лежит в $\mathfrak{a}$, так что идеал $\mathfrak{a}$ не прост. Обратно, если $\mathfrak{a}$ — непростой радикальный идеал и если $f_1 \notin \mathfrak{a}$, $f_2 \notin \mathfrak{a}$, $f_1 f_2 \in \mathfrak{a}$, то, полагая $X_i = V(\mathfrak{a} + (f_i))$, имеем $V(\mathfrak{a}) = X_1 \cup X_2$, поскольку из $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ вытекает, что $\mathfrak{p} \ni f_1 f_2$, откуда $\mathfrak{p} \ni f_1$ или $\mathfrak{p} \ni f_2$, и если $\mathfrak{p} \ni f_i$, то $\mathfrak{p} \in X_i$. $\square$

Простой идеал $\mathfrak{p}$ называют *общей точкой* неприводимого замкнутого множества $V(\mathfrak{p})$.

Теперь мы готовы к тому, чтобы доказать простейший результат о разложении идеалов. Начнем с геометрической формулировки.

Предложение 6.6. *Пусть A — нётерово кольцо. Тогда всякое замкнутое подмножество $X \subset \operatorname{Spec}(A)$ можно единственным образом представить в виде конечного объединения неприводимых замкнутых подмножеств $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$, ни одно из которых не содержится в другом.*

Разложение, о котором идет речь в этом предложении, называется *минимальным*, а множества $X_1, \ldots, X_n$ называются *неприводимыми компонентами* множества X.

Доказательство. Заметим для начала, что из предложения 6.3 и нётеровости кольца A вытекает, что всякое непустое семейство замкнутых подмножеств в $\operatorname{Spec}(A)$ имеет минимальный элемент.

Теперь докажем, что всякое замкнутое $X \subset \mathrm{Spec}(A)$ можно представить в виде конечного объединения замкнутых неприводимых подмножеств. В самом деле, если это неверно, то существует такое замкнутое X_0, что само оно в этом виде непредставимо, а всякое его собственное замкнутое подмножество — представимо. Поскольку при этом X_0 неприводимым быть не может, имеем $X_0 = X_1 \cup X_2$, где $X_i \subsetneq X_0$. Объединяя разложения для X_1 и X_2, получаем разложение для X_0 — противоречие.

Если в полученном разложении $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ имеем $X_i \subset X_j$, то X_i можно отбросить, и объединение остальных X_j не изменится. Продолжая в том же духе, мы в конце концов придем к разложению, в котором ни одно из X_i не содержится в другом.

Докажем, наконец, единственность. Пусть $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$ — два минимальных разложения. Тогда для всякого i имеем $Y_i = (Y_i \cap X_1) \cup \ldots \cup (Y_i \cap X_m)$; ввиду неприводимости Y_i получаем, что $Y_i = Y_i \cap X_j \Leftrightarrow Y_i \subset X_j$ для некоторого j; меняя ролями иксы и игреки, получаем также, что $X_j \subset Y_k$ для некоторого k, откуда $Y_i \subset Y_k$. Ввиду минимальности разложения это возможно только если $k = i$, откуда $Y_i = X_j$. Итак, всякое Y_i совпадает с каким-то из X_j; остается проверить, что $m = n$. Пусть это не так; тогда X можно представить в виде объединения только части из X_i, и окажется, что $X_j \subset \bigcup_{i \neq j} X_i$ для некоторого j. Это однако, невозможно, так как ввиду неприводимости X_j отсюда будет следовать, что $X_j \subset X_i$ для некоторого $i \neq j$, в противоречие с минимальностью. $\square$

Следствие 6.7 (из доказательства). *Если $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ — минимальное разложение на неприводимые компоненты, то никакое X_i не содержится в $\bigcup_{j \neq i} X_j$.*

Переведем теперь доказанное утверждение с геометрического языка на алгебраический. Сопоставляя его с предложениями 6.3 и 6.5, получаем:

Предложение 6.8. *Пусть $\mathfrak{a}$ — радикальный идеал в нётеровом кольце A. Тогда он единственным образом представляется в виде пересечения $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n$, где $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ — простые идеалы, ни один из которых не содержится в другом.*

Применительно к произвольному идеалу наша конструкция дает следующее.

Предложение-определение 6.9. *Если $\mathfrak{a} \subset A$ — идеал в нётеровом кольце A, и если $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{p}_1) \cup \ldots \cup V(\mathfrak{p}_n)$ — минимальное разложение на неприводимые компоненты, где $\mathfrak{p}_j$ — простые идеалы, то всякий простой идеал, содержащий $\mathfrak{a}$, содержит один из идеалов $\mathfrak{p}_i$. Идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ называются минимальными простыми идеалами, содержащими $\mathfrak{a}$.*