7. Ассоциированные простые идеалы

На предыдущей лекции мы получили разложение радикального идеала в нётеровом кольце в пересечение конечного числа простых идеалов. Теперь займемся идеалами произвольными. Технически будет удобнее работать не только с кольцами, но и с модулями.

Определение 7.1. Пусть M — модуль над кольцом A. Простой идеал $\mathfrak{p} \subset A$ называется *ассоциированным с* M, если M содержит подмодуль, изоморфный $A/\mathfrak{p}$ (или, что равносильно, M содержит элемент, аннулятор которого совпадает с $\mathfrak{p}$).

Множество всех простых идеалов, ассоциированных с M, обозначается $\operatorname{Ass}(M)$ (или $\operatorname{Ass}_A(M)$, если хочется подчеркнуть, что M рассматривается именно как A-модуль).

Пример 7.2. Если $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал, то аннулятор всякого ненулевого элемента A-модуля $A/\mathfrak{p}$ совпадает с $\mathfrak{p}$; поэтому $\operatorname{Ass}_A(A/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.

Предложение 7.3. *Пусть M — модуль над кольцом A. Тогда всякий максимальный элемент в множестве идеалов вида* $\operatorname{Ann}(m)$ *для всех ненулевых $m \in M$ является простым идеалом.*

(Через $\operatorname{Ann}(m)$, где $m \in M$, обозначается идеал $\{f \in A \mid fm = 0\}$.)

Следствие 7.4. *Если A нётерово и $M \neq 0$, то* $\operatorname{Ass}(M) \neq \varnothing$.

Доказательства предложения. Пусть указанный максимальный аннулятор имеет вид $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(x)$. Предположим, что $fg \in \mathfrak{p}$, но $f \notin \mathfrak{p}$; нам надо показать, что $g \in \mathfrak{p}$. В самом деле, имеем $fgx = 0$, но $fx \neq 0$. Если $gx \neq 0$, то включение $\operatorname{Ann}(x) \subset \operatorname{Ann}(gx)$ строгое (так как f лежит во втором из этих идеалов, но не в первом), что противоречит максимальности. Значит, $gx = 0$, то есть $g \in \mathfrak{p}$. $\square$

Предложение 7.5. *Если E — подмодуль модуля F, то* $\operatorname{Ass}(E) \subset \operatorname{Ass}(F) \subset \operatorname{Ass}(E) \cup \operatorname{Ass}(E/F)$.

Доказательство. Включение $\operatorname{Ass}(E) \subset \operatorname{Ass}(F)$ очевидно. Пусть теперь $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(F)$, и пусть $Z \subset F$ — подмодуль, изоморфный $A/\mathfrak{p}$. Заметим, что аннулятор всякого ненулевого элемента в Z совпадает с $\mathfrak{p}$ (пример 7.2), так что если $E \cap Z \neq 0$, то E содержит элемент с аннулятором $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(E)$; если же $E \cap Z = 0$, то Z изоморфно отображается на подмодуль в E/F, так что $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(E/F)$. $\square$

Предложение 7.6. *Пусть M — конечно порожденный модуль над нётеровым кольцом. Тогда существует ряд подмодулей*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M, \tag{7.1}$$

в которой для всякого i имеем $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i \subset A$ — простой идеал.

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$ — семейство подмодулей $N \subset M$, обладающих конечным рядом с факторами, изоморфными $A/$(простой идеал). Поскольку A нётерово, $\mathrm{Ass}(M) \neq \varnothing$ и тем самым $\mathcal{X} \neq \varnothing$, а поскольку M нётеров, в $\mathcal{X}$ есть максимальный элемент — обозначим его N. Если $N = M$, то все доказано, если нет, то, поскольку $\mathrm{Ass}(M/N) \neq \varnothing$, в M/N имеется подмодуль, изоморфный $A/\mathfrak{p}$; если N' — прообраз этого подмодуля в M, то $N' \in \mathcal{X}$ и $N \subsetneq N'$, что противоречит максимальности N. $\square$

Следствие 7.7. *Если M — конечно порожденный модуль над нётеровым кольцом, то* $\mathrm{Ass}(M)$ *непусто и конечно.*

Доказательство. Непустота была установлена выше; последовательно применяя к ряду (7.1) предложение 7.5, получаем, что $\mathrm{Ass}(M) \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$. $\square$

Ассоциированные простые идеалы обладают целым рядом замечательных свойств. Например, с их помощью хорошо описываются делители нуля:

Определение 7.8. Пусть M — модуль над A. Элемент $f \in A$ называется *M-делителем нуля*, если существует $m \in M \setminus 0$, для которого $fm = 0$.

Предложение 7.9. *Пусть M — модуль над нётеровым кольцом A. Тогда множество M-делителей нуля совпадает с* $\bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p}$.

Доказательство. Поскольку всякий $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ является аннулятором какого-то ненулевого элемента модуля M, все элементы ассоциированных простых идеалов являются M-делителями нуля. Обратно, пусть $f \in A$ и $fm = 0$, где $m \neq 0$. Тогда $f \in \mathrm{Ann}(m)$, и из нётеровости A и предложения 7.3 вытекает, что $\mathrm{Ann}(m)$ содержится в каком-нибудь ассоциированном простом идеале, так что $f \in \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p}$. $\square$

Множество $\mathrm{Ass}(M)$ хорошо ведет себя при локализации:

Предложение 7.10. *Пусть A — нётерово кольцо, $S \subset A$ — мультипликативное подмножество и M — модуль над A. Тогда при естественном отождествлении* $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ *с подмножеством в* $\mathrm{Spec}(A)$ *(предложение 2.7) имеем* $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = \mathrm{Spec}(S^{-1}A) \cap \mathrm{Ass}_A(M)$.

Доказательство. Если $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$, то имеем точную последовательность

$$0 \to A/\mathfrak{p} \to M.$$

Применяя к ней операцию S^{-1}, получаем точную последовательность

$$0 \to S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p} \to S^{-1}M. \tag{7.2}$$

Если $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(S^{-1}A)$, то $S^{-1}\mathfrak{p}$ — простой идеал в $S^{-1}A$, соответствующий $\mathfrak{p}$, и (7.2) показывает, что $S^{-1}\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}A)$; этим доказано включение $\operatorname{Spec}(S^{-1}A) \cap \operatorname{Ass}_A(M) \subset \operatorname{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$.

Чтобы доказать обратное включение, предположим, что $\mathfrak{p}'$ — простой идеал в $S^{-1}A$, ассоциированный с $S^{-1}M$; нам надо проверить, что $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}') \in \operatorname{Ass}_A(M)$, где $\varphi\colon A \to S^{-1}A$ — канонический гомоморфизм. По определению, имеем $\mathfrak{p}' = \operatorname{Ann}(m/s)$, где $m \in M$, $s \in S$. Пусть теперь $\mathfrak{p} = (f_1, \ldots, f_m)$. Поскольку $\varphi(f_i) \cdot (m/s) = 0$, существуют такие $t_1, \ldots, t_m \in S$, что $f_i(t_i m) = 0$. Положим $u = t_1 \ldots t_m \in S$; тогда $\mathfrak{p} \subset \operatorname{Ann}(um)$ по построению, и $\operatorname{Ann}(um) \subset \mathfrak{p}$, поскольку если $f \cdot um = 0$, то $(f/1)(m/s) = 0$. Итак, $\mathfrak{p}$ — аннулятор элемента в M и как таковой принадлежит $\operatorname{Ass}_A(M)$. $\square$

Попробуем теперь выяснить геометрический смысл ассоциированных простых идеалов. Сначала — простой общий результат:

Предложение 7.11. $\operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{supp}(M)$.

Доказательство. Если $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$, то имеем точную последовательность $0 \to A/\mathfrak{p} \to M$; значит, последовательность $0 \to (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p}$ тоже точна (см. предложение 2.6); осталось заметить, что ввиду того же предложения $(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p})_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = k(\mathfrak{p})$ есть ненулевой модуль, так что и $M_\mathfrak{p} \neq 0$. $\square$

Чтобы получить содержательный результат, надо, как водится, наложить условия нётеровости:

Предложение 7.12. *Пусть M — конечно порожденный модуль над нётеровым кольцом A, и пусть* $\operatorname{supp}(M) = V(\mathfrak{p}_1) \cup \ldots \cup V(\mathfrak{p}_n)$ *— минимальное разложение на неприводимые компоненты (идеалы $\mathfrak{p}_i$ — простые). Тогда* $\operatorname{Ass}(M) \supset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{supp}(M)$, имеем $M_{\mathfrak{p}_i} \neq 0$, так что $\operatorname{Ass}_{A_{\mathfrak{p}_i}}(M_{\mathfrak{p}_i}) \neq \varnothing$. С другой стороны, из леммы 4.1 ясно, что $\operatorname{supp}_{A_{\mathfrak{p}_i}}(M_{\mathfrak{p}_i}) = \operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}_i}) \cap \operatorname{supp}(M)$, а так как $\mathfrak{p}_i$ — минимальный простой идеал в $\operatorname{supp}(M)$, это пересечение состоит из одного-единственного идеала $\mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{p}_i}$, соответствующего $\mathfrak{p}_i$ при естественном вложении $\operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}_i}) \subset \operatorname{Spec}(A)$. Ввиду предложения 7.11 имеем тогда $\operatorname{Ass}_{A_{\mathfrak{p}_i}}(M_{\mathfrak{p}_i}) = \mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{p}_i}$, откуда ввиду предложения 7.10 имеем $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass}(M)$. $\square$

Итак, множество ассоциированных простых идеалов модуля (в нётеровом случае) заведомо содержит общие точки неприводимых компонент его носителя. Эти точки (=идеалы) называются *изолированными* ассоциированными идеалами. Поскольку $\operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{supp}(M)$, каждый из неизолированных ассоциированных простых идеалов содержит какой-то из изолированных; элементы $\mathrm{Ass}(M)$, не являющиеся изолированными, называются *вложенными*.[1] Вот простой пример, в котором возникают вложенные компоненты. Пусть k — поле, $A = k[X, Y, Z], Q = XY+Z^2$ и $M = A/(XQ, YQ, ZQ)$. Тогда легко видеть, что $\mathrm{supp}(M) = V(Q)$, но при этом идеал $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)$ лежит в $\mathrm{Ass}(M)$, так как является аннулятором образа Q в модуле M. Идеал $\mathfrak{m}$ — вложенный (в $V(Q)$).

Приведем теперь пример ситуации, в которой вложенных идеалов заведомо не возникает. Общий смысл следующего предложения можно передать так: «где нет нильпотентов, там нет и вложенных компонент». (*Предупреждение*: обратное неверно!)

Предложение 7.13. *Пусть $\mathfrak{a}$ — радикальный идеал в нётеровом кольце A, и пусть $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{p}_1) \cup \ldots \cup V(\mathfrak{p}_n)$ — минимальное разложение на неприводимые компоненты (идеалы $\mathfrak{p}_i$ — простые). Тогда $\mathrm{Ass}_A(A/\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_i$, имеем $A/\mathfrak{a} \hookrightarrow A/\mathfrak{p}_1 \oplus \ldots \oplus A/\mathfrak{p}_n$. Из предложения 7.5 ясно, что Ass от правой части есть $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$, так что $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{a}) \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$. Обратное включение следует из предложения 7.12. $\square$

[1] Этот парадоксально звучащий термин имеет геометрическое происхождение: если $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$, то замкнутое множество $V(\mathfrak{p}')$ *вложено* в $V(\mathfrak{p})$.