9. Целая зависимость

Определения

Мы будем придерживаться следующих соглашений. Если B — подкольцо в кольце A и $b_1, \ldots, b_n \in B$, то через $A[b_1, \ldots, b_n]$ будет обозначаться наименьшее подкольцо в B, содержащее A и $b_1, \ldots, b_n$; оно, очевидно. состоит из всевозможных сумм $\sum f_{i_1,\ldots,i_n} b_1^{i_1} \ldots b_n^{i_n}$, где $f_{i_1,\ldots,i_n} \in A$. В этой ситуации говорят, что $A[b_1, \ldots, b_n]$ является *алгеброй конечного типа над* A (порожденной $b_1, \ldots, b_n$).

Определение 9.1. Пусть A — подкольцо кольца B. Говорят, что B *конечно над* A, если оно конечно порождено как A-модуль.

Например, кольцо гауссовых целых $\mathbb{Z}[i]$ конечно над $\mathbb{Z}$, а поле $\mathbb{Q}$ над $\mathbb{Z}$ *не* конечно; кольцо многочленов $A[X]$ никогда не является конечным над A.

Предложение-определение 9.2. *Пусть A — подкольцо кольца B и $x \in B$. Говорят, что x* целый *над A, если выполняется любое из следующих эквивалентных условий:*

(i) *Подкольцо $A[x]$ конечно над A.*

(ii) *Существует содержащее x кольцо B', для которого $A \subset B' \subset B$ и B' конечно над A.*

(iii) *Элемент x удовлетворяет уравнению вида*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{9.1}$$

где $a_j \in A$.

Уравнения вида (9.1) называются *уравнениями целой зависимости*; существенно, что в таких уравнениях старший коэффициент равен единице.

Доказательство эквивалентности этих трех определений содержится в задачах, входящих в листок 5.

Пример 9.3. Как известно из школьного курса, рациональное число цело над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда оно лежит в $\mathbb{Z}$.

Определение 9.4. Пусть A — подкольцо кольца B и $x \in B$. Говорят, что B *цело* над A, если всякий элемент кольца B цел над A.

Замечание 9.5. Из 9.2 ясно, что если B конечно над A, то оно и цело над A.

Предложение 9.6. (i) *Если A — подкольцо в B и элементы $b_1, \ldots, b_n \in B$ целы над A, то кольцо $A[b_1, \ldots, b_n]$ конечно над A;*

(ii) *если элементы $b_1, b_2 \in B$ целы над подкольцом $A \subset B$, то таковы же и $b_1 \pm b_2$ и $b_1 b_2$;*

(iii) *Если C цело над $B \subset C$ и B цело над $A \subset B$, то C цело над A.*

Доказательство. Утверждение (i) с очевидностью вытекает из определения целого элемента и следующей леммы:

Лемма 9.7. *Если C конечно над $B \subset C$ и B конечно над $A \subset B$, то C конечно над A.*

Доказательство леммы. Если $b_1, \ldots, b_m$ — образующие B как A-модуля, а $c_1, \ldots, c_n$ — образующие C как B-модуля, то $\{b_i c_j\}$ — образующие C как A-модуля. □

Для доказательства (ii) заметим, что ввиду (i) кольцо $A[b_1, b_2]$, содержащее сумму, произведение и разность b_1 и b_2, будет конечно (и тем самым цело) над A.

Для доказательства (iii) предположим, что $c \in C$ удовлетворяет целому уравнению над B с коэффициентами $b_1, \ldots, b_n$ и положим $B' = A[b_1, \ldots, b_n]$. Тогда C конечно над B' ввиду определения целой зависимости, а B' конечно над A ввиду пункта (i). Следовательно, C конечно над A по лемме, так что c цело над A. □

Теорема о подъеме

Теорема Коэна–Зайденберга о подъеме — один из основных фактов о целой зависимости.

Теорема 9.8 (теорема о подъеме). *Пусть $A \subset B$ — целое расширение колец. Тогда:*

(i) *Для всякого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ существует простой идеал $\mathfrak{p}' \subset B$, для которого $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$.*

(ii) *Если $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1$ — простые идеалы в A, и если простой идеал $\mathfrak{p}'_0 \subset B$ таков, что $\mathfrak{p}'_0 \cap A = \mathfrak{p}_0$, то существует такой простой идеал $\mathfrak{p}'_1 \subset B$, что $\mathfrak{p}'_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$.*

(iii) *Простой идеал $\mathfrak{p}' \subset B$ максимален тогда и только тогда, когда максимален идеал $\mathfrak{p}' \cap A \subset A$.*

(iv) *Пусть $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал, и пусть $\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2 \subset B$ — такие простые идеалы, что $\mathfrak{p}'_1 \cap A = \mathfrak{p}'_2 \cap A$. Если $\mathfrak{p}'_1 \subset \mathfrak{p}'_2$, то $\mathfrak{p}'_1 = \mathfrak{p}'_2$.*

(iv$'$) *Если обозначить вложение $A \hookrightarrow B$ через i, то всякий слой отображения $i^*\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ является (в топологии, индуцированной со $\operatorname{Spec}(B)$) T_1-пространством;*[1]

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, докажем следующую полезную техническую лемму.

Лемма 9.9. *Пусть $A \subset B$ — целое расширение колец. Тогда:*

(i) *Если $S \subset A$ — мультипликативное множество, то индуцированное расширение $S^{-1}A \subset S^{-1}B$ будет целым.*

[1]Как известно, T_1-пространства — это те, в которых все точки замкнуты.

(ii) *Если* $\mathfrak{b} \subset B$ *— идеал и* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap A$, *то индуцированное расширение* $A/\mathfrak{a} \subset B/\mathfrak{b}$ *будет целым.*

Доказательство леммы 9.9. (i): Если элемент $x \in B$ удовлетворяет уравнению (9.1), то элемент x/s, где $s \in S$, удовлетворяет уравнению

$$(x/s)^n + (a_1/s)(x/s)^{n-1} + \ldots + (a_{n-1}/s^{n-1})(x/s) + (a_n/s^n) = 0.$$

(ii): При редукции по модулю $\mathfrak{b}$ уравнения целой зависимости для x над A получится уравнение целой зависимости для $x \bmod \mathfrak{b}$ над $A/\mathfrak{a}$. $\square$

Доказательство утверждения (i). Положим $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Тогда по лемме 9.9 кольцо $S^{-1}B$ будет цело над $S^{-1}A = A_\mathfrak{p}$; поскольку, очевидно, диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(B) \arrow[d] & \mathrm{Spec}(S^{-1}B) \arrow[l] \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathrm{Spec}(A) & \mathrm{Spec}(A_\mathfrak{p}) \arrow[l, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна и отображение ψ переводит максимальный идеал кольца $A_\mathfrak{p}$ в идеал $\mathfrak{p}$, достаточно доказать, что $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) \neq \varnothing$; иными словами, достаточно доказать утверждение (i) теоремы для случая, когда A — локальное кольцо и $\mathfrak{p}$ — его максимальный идеал.

Заметим, что в этом случае нам достаточно только проверить, что $\mathfrak{p}B$ (наименьший идеал в B, содержащий $\mathfrak{p}$) является собственным идеалом в B. В самом деле, если $\mathfrak{p}B \subset B$ — собственный идеал, то он содержится в некотором простом идеале $\mathfrak{p}'$, и при этом $\mathfrak{p}' \cap A \supset \mathfrak{p}$, откуда $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$, так как $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал локального кольца.

Осталось показать, что $\mathfrak{p}B \neq B$. Предположим противное. Тогда $f_1 b_1 + \ldots + f_n b_n = 1$, где $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{p}$, $b_1, \ldots, b_n \in B$. Положим $B' = B[b_1, \ldots, b_n]$; имеем $\mathfrak{p}B' = B'$, и при этом из предложения 9.6 (i) следует, что B' конечно порождено как A-модуль. Тогда по лемме Накаямы $B' = 0$ — противоречие. $\square$

Доказательство утверждения (ii). Положим $\bar{A} = A/\mathfrak{p}_0$, $\bar{B} = B/\mathfrak{p}'_0$. Имеем $\bar{A} \hookrightarrow \bar{B}$. Поскольку диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(B) \arrow[d] & \mathrm{Spec}(\bar{B}) \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathrm{Spec}(A) & \mathrm{Spec}(\bar{A}) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

коммутативна, достаточно показать, что $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_0) \neq \varnothing$, а это следует из уже доказанного пункта (i) и того, что $\bar{B}$ цело над $\bar{A}$ ввиду леммы 9.9 (ii)

Доказательству пункта (iii) предпошлем еще одну лемму.

Лемма 9.10. *Пусть целостное кольцо B цело над своим подкольцом A. Тогда B является полем в том и только том случае, когда A является полем.*

Доказательство леммы 9.10. Пусть B — поле и $x \in A \setminus \{0\}$. Тогда $x^{-1} \in B$ цело над A, т.е. для некоторого $n > 0$ имеет место равенство

$$x^{-n} = a_1 x^{-n+1} + \ldots + a_{n-1}x^{-1} + a_n,$$

где $a_i \in A$. Умножая обе части на x^{n-1}, находим, что $x^{-1} \in A$.

Пусть A — поле и $x \in B \setminus \{0\}$. Пусть

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{9.2}$$

— уравнение целой зависимости для x с минимальным n. Поскольку B целостно, $a_n \neq 0$ (иначе можно было бы сократить на x и получить уравнение степени $n-1$). Пользуясь тем, что A — поле, получаем из (9.2), что

$$x \cdot (-a_n^{-1}(x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1})) = 1,$$

т.е. что x обратим в B $\square$

Из доказанной леммы пункт (iii) теоремы 9.8 немедленно следует: расширение $A/(\mathfrak{p}' \cap A) \subset B/\mathfrak{p}'$ является целым ввиду леммы 9.9, и кольцо $B/\mathfrak{p}'$ целостно, так как идеал $\mathfrak{p}'$ прост.

Для доказательства пункта (iv) положим $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Тогда кольцо $S^{-1}B$ цело над $S^{-1}A = A_\mathfrak{p}$, причем имеем $S^{-1}\mathfrak{p}_1' \subset S^{-1}\mathfrak{p}_2'$, и $S^{-1}\mathfrak{p}_1' \cap A_\mathfrak{p} = S^{-1}\mathfrak{p}_2' \cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Идеал $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ максимален в $A_\mathfrak{p}$, поэтому ввиду уже доказанного пункта (iii) теоремы идеалы $S^{-1}\mathfrak{p}_1'$ и $S^{-1}\mathfrak{p}_2'$ максимальны в $S^{-1}A$; поскольку один из них содержится в другом, они совпадают, а значит, ввиду предложения 2.7, совпадают идеалы $\mathfrak{p}_1'$ и $\mathfrak{p}_2'$.

Наконец, утверждение (iv$'$) является просто переформулировкой утверждения (iv). $\square$

Вот полезное следствие теоремы о подъеме.

Теорема 9.11. *Пусть $i\colon A \hookrightarrow B$ — целое расширение колец и $i^*\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ — индуцированное отображение. Тогда отображение i^* сюръективно и замкнуто (последнее означает, что оно переводит замкнутые подмножества в замкнутые).*

Доказательство. Сюръективность отображения i^* — это просто утверждение (i) теоремы о подъеме. Для доказательства его замкнутости предположим, что $V(\mathfrak{b}) \subset \mathrm{Spec}(B)$ — замкнутое множество, где $\mathfrak{b} \subset B$ — идеал. Если $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap A$, то очевидно, что $i^*(V(\mathfrak{b})) \subset V(\mathfrak{a})$; для доказательства обратного включения надо проверить, что для всякого $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$, где $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A, существует простой $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{b}$, для которого $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$; это вытекает из теоремы о подъеме, примененной к целому ввиду леммы 9.9 расширению $A/\mathfrak{a} \subset B/\mathfrak{b}$. $\square$