Коммутативная алгебра (весна 2006)
Листок 1

1. а) Пусть $\mathbb{Z}[i]$ — кольцо целых гауссовых чисел. Опишите прообразы точек при отображении $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[i] \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, индуцированном вложением $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[i]$.

Выполните аналогичное задание для следующих отображений колец:

б) $\mathbb{R}[X] \hookrightarrow \mathbb{C}[X]$;

в) $\mathbb{F}_q[X] \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}_q}[X]$ ($\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов, черта обозначает алгебраическое замыкание);

г) $k[T^p] \hookrightarrow k[T]$, где p — простое число, а k — поле характеристики p.

2. Пусть A — нётерово кольцо. Покажите, что кольцо формальных степенных рядов $A[[X]]$ также нётерово. (По определению, $A[[X]]$ состоит из формальных бесконечных сумм $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, складываемых и перемножаемых по очевидным правилам.)

3. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство и $A = C(X)$ — кольцо вещественнозначных (или комплекснозначных) непрерывных функций на X. Докажите, что всякий максимальный идеал в A имеет вид $\mathfrak{m}_x$ для некоторой точки $x \in X$.

4. В условиях задачи 3 отображение $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ задает вложение $X \hookrightarrow \operatorname{Spec} C(X)$. Докажите, что при этом вложении топология Зарисского на $\operatorname{Spec} C(X)$ индуцирует исходную топологию на X.

5. Пусть I — произвольное множество; для каждого элемента $i \in I$ зафиксируем поле k_i и положим $A = \prod_i k_i$.

а) Покажите, что идеалы в A находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с фильтрами на I (семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества I называется *фильтром*, если оно удовлетворяет следующим трем условиям: $\varnothing \notin \mathcal{F}$, $(A \in \mathcal{F} \wedge B \in \mathcal{F}) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$, $(A \in \mathcal{F} \wedge B \supset A) \Rightarrow B \in \mathcal{F}$).

б) Покажите, что $\operatorname{Spec} A$ — компактное хаусдорфово пространство.

в) Для всякого $i \in I$ положим

$$\mathfrak{m}_i = \{(f_j)_{j \in I} \mid f_i = 0\}.$$

Поскольку $\mathfrak{m}_i$ — максимальный идеал в A, соответствие $i \mapsto \mathfrak{m}_i$ задает вложение $\alpha\colon I \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$. Положите, что для всякого отображения $\varphi\colon I \to X$, где X — хаусдорфов компакт, существует и единственно непрерывное отображение $\beta\colon \operatorname{Spec} A \to X$, для которого $\beta \circ \alpha = \varphi$ (по-ученому говоря, $\operatorname{Spec} A$ есть компактификация Стоуна–Чеха дискретного пространства I).

6. Кольцо A называется *булевым*, если для всякого $a \in A$ имеет место равенство $a^2 = a$.

а) Покажите, что в булевом кольце всякий простой идеал максимален.

б) Покажите, что в булевом кольце выполнено тождество $2a = 0$.

в) Введем в булевом кольце A следующие операции: $a \vee b = a + b + ab$, $a \wedge b = ab$, $\bar{a} = 1 + a$. Покажите, что относительно этих операций A становится булевой алгеброй.

г) Покажите, что в булевом кольце всякий конечно порожденный идеал является главным.

д) Покажите, что спектр булева кольца хаусдорфов, компактен и вполне несвязен (топологическое пространство называется *вполне несвязным*, если оно обладает базой, состоящей из открыто-замкнутых множеств).

е) Покажите, что всякая булева алгебра изоморфна алгебре открыто-замкнутых подмножеств некоторого хаусдорфова компакта («теорема Стоуна»).