Коммутативная алгебра (весна 2006)
Листок 2

1. Пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — идеалы в кольце A и $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=A$. Покажите, что $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$.

2. Пусть $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_n$ — простые идеалы в кольце A и $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}_1\cup\ldots\cup\mathfrak{p}_n$, где $\mathfrak{a}\subset A$ — идеал. Докажите, что $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}_i$ для некоторого i

3. Пусть S — мультипликативное подмножество кольца A. Покажите, что $r(S^{-1}A)=r(A)\cdot S^{-1}A$.

4. Покажите, что все главные открытые подмножества в спектре кольца квазикомпактны.

5. Пусть $f,g\in A$. Покажите, что если $D(f)=D(g)$, то $A_f\simeq A_g$.

6. Пусть $f,g\in A$ и $D(f)\supset D(g)$. Постройте канонический гомоморфизм $\rho_{D(f),D(g)}\colon A_f\to A_g$ («канонический» означает «зависящий только от подмножеств $D(f),D(g)\subset\operatorname{Spec}(A)$, но не от выбора элементов f и g»).

7. Очевидно, всегда имеем $D(f)\supset D(fg)$. Пусть $f\in A$ и $D(f)=\bigcup_{\alpha\in J}D(f_\alpha)$. Предположим, что для каждого $\alpha\in J$ выбран элемент $s_\alpha\in A_{f_\alpha}$, причем для любых $\alpha,\beta\in J$ имеем

$$\rho_{D(f_\alpha),D(f_\alpha f_\beta)}(s_\alpha)=\rho_{D(f_\beta),D(f_\alpha f_\beta)}(s_\beta),$$

(где ρ определено в задаче 6).

а) В предположении, что кольцо A целостно, докажите, что существует $s\in A_f$, для которого $\rho_{D(f),D(f_\alpha)}(s)=s_\alpha$ при всех $\alpha\in J$.

б) Докажите то же самое для произвольного A.

8. Пусть A — кольцо, $S\subset A$ — мультипликативное множество, M и N — модули над A. Приведите пример, когда гомоморфизм из $S^{-1}(\operatorname{Hom}_A(M,N))$ в $\operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M,S^{-1}N)$, заданный формулой

$$\varphi/s\mapsto(m/t\mapsto\varphi(m)/st)$$

не является ни инъективным, ни сюръективным.

9.

а) Пусть $A=A_1\times A_2$. Покажите, что $\operatorname{Spec}A\simeq\operatorname{Spec}A_1\sqcup\operatorname{Spec}A_2$ (несвязное объединение).

б) Покажите, что и обратно, если $\operatorname{Spec}A$ несвязен, то A представимо в виде прямого произведения двух ненулевых колец. (*Указание*: A представимо в виде прямого произведения тогда и только тогда, когда существуют ненулевые $e_1,e_2\in A$, для которых $e_1^2=e_1$, $e_2^2=e_2$, $e_1e_2=0$ и $e_1+e_2=1$.)

10. Пусть A — кольцо непрерывных (скажем, вещественнозначных) функций на $[0;1]$. Верно ли, что всякий простой идеал в A максимален?