Коммутативная алгебра (весна 2006)
Листок 3

1. а) Найдите $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ для любых натуральных m, n.

б) Найдите тензорное произведение двух произвольных конечно порожденных абелевых групп (рассматриваемых как модули над $\mathbb{Z}$).

2. Пусть k — поле и $A = k[X, Y]$ (кольцо многочленов). Найдите $A/\mathfrak{m}_a \otimes_A A/\mathfrak{m}_b$ для любых $a, b \in k^2$.

3. Пусть A — кольцо. Опишите кольцо $A[X] \otimes_A A[X]$.

4. Пусть модуль P обладает тем свойством, что для всякого инъективного гомоморфизма $f\colon E \to F$ индуцированный гомоморфизм $f \otimes 1\colon E \otimes P \to F \otimes P$ также инъективен. Покажите, что P является плоским.

5. Пусть M и N — модули над кольцом A, и пусть N порожден конечным числом своих элементов $n_1, \ldots, n_k$. Покажите, что если для $m_1, \ldots, m_k \in M$ имеем $\sum m_i \otimes n_i = 0 \in M \otimes N$, то существуют $m'_1, \ldots, m'_j \in M$ (где $1 \leqslant j \leqslant n$ для некоторого n) и $a_{ij} \in A$ (где $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant n$), для которых $m_i = \sum a_{ij} m'_j \,\forall i$ и $\sum a_{ij} n_i = 0 \,\forall j$. (*Указание.* Задание k образующих у модуля N равносильно заданию сюръекции $A^r \to N$.)

6. A-модуль M называется *конечно представимым*, если он удовлетворяет следующим двум условиям:

1) M конечно порожден;

2) существует система образующих $m_1, \ldots, m_k \in M$, для которой модуль соотношений между $m_1, \ldots, m_k$ конечно порожден (иными словами, конечно порождено ядро сюръекции $A^k \to M$, отображающей i-й элемент базиса в m_i).

а) Покажите, что если M конечно представим, то для любой системы образующих $x_1, \ldots, x_r \in M$ модуль соотношений между $x_1, \ldots, x_r$ конечно порожден.

б) Пусть в точной последовательности

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

модули M' и M'' конечно представимы. Покажите, что и M конечно представим. Верно ли обратное?

Замечание. Все результаты этой задачи верны и для левых (соотв. правых) модулей над произвольными кольцами.

7. Пусть $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец. Покажите, что у функтора «ограничение скаляров с B на A» имеется правый сопряженный. Подробнее: придумайте естественную конструкцию, ставящую в соответствие A-модулю N некоторый B-модуль $F(N)$, при которой получается естественный изоморфизм $\mathrm{Hom}_A(M, N) \simeq \mathrm{Hom}_B(M, F(N))$ для всякого B-модуля M.

8. Докажите, что абелева группа является плоским $\mathbb{Z}$-модулем тогда и только тогда, когда она не имеет кручения.

9. Докажите, что A-модуль P является плоским тогда и только тогда, когда для всякого идеала $\mathfrak{a} \subset A$ гомоморфизм $\mathfrak{a} \otimes P \to P$, индуцированный этим вложением, является инъективным.