Коммутативная алгебра (весна 2006)
Листок 4

1. Пусть $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец и $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Покажите, что $\operatorname{Spec}(k(\mathfrak{p}) \otimes_A B)$ гомеоморфно $\phi^{*-1}(\{\mathfrak{p}\})$, где $\varphi^*\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ индуцировано гомоморфизмом φ.

2. Пусть $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$, где $f_i \in A$. Покажите, что A-модуль M конечно порожден тогда и только тогда, когда M_{f_i} конечно порожден над A_{f_i} для всякого $i \in I$.

3. A-модуль M называется *строго плоским*, если он плосок и при этом $M \otimes N \neq 0$, как только $N \neq 0$.

а) Покажите, что плоский A-модуль M строго плосок тогда и только тогда, когда $M \neq \mathfrak{m}M$ для всякого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset A$.

б) Пусть $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец, превращающий B в плоский A-модуль (такой гомоморфизм называется *плоским*). Покажите, что в этих условиях B строго плоско над A тогда и только тогда, когда отображение $\varphi^*\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ сюръективно.

4. Пусть $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, $B = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$. Покажите, что вложение $A \subset B$ не является плоским гомоморфизмом (см. определение в задаче 3).

5. Пусть k — поле, $A = k[T^2, T^3] \subset B = k[T]$. Является ли вложение $A \subset B$ плоским гомоморфизмом?

6. Пусть k — поле и $A \subset k[T_1, \dots, T_n]$ — подкольцо, содержащее k и имеющее конечную коразмерность в $k[T_1, \dots, T_n]$ как векторное пространство над k. Покажите, что кольцо A нётерово.