# Коммутативная алгебра (весна 2006)
## Листок 5

В двух первых задачах мы приводим геометрические (хотя и не алгебро-геометрические) примеры проективных модулей, не являющихся свободными.

**1.** (Касательное расслоение к сфере.) Путь $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\}$. Обозначим через $A$ кольцо непрерывных функций на $S^n$, а через $M$ — множество (непрерывных) векторных полей на $S^n$, то есть непрерывных отображений $v\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющих условию $(x, v(x)) = 0$ для всех $x \in S^n$. На $M$ имеется очевидная структура $A$-модуля.

а) Покажите, что $M \oplus A \simeq A^{n+1}$.

б) Покажите, что если $x \in S^n$ и $\mathfrak{m}_x \subset A$ — соответствующий максимальный идеал, то $M \otimes_A A/\mathfrak{m}_x \simeq \mathbb{R}^n$.

в) Выведите из (б), что если $M \simeq A^r$, то $r = n$.

г) Выведите из (в), что при $n = 2$ модуль $M$ свободным не является (для каких еще $n$ вы можете это доказать?).

д) Покажите, что при $n = 3$ модуль $M$ свободен.

**2.** (Лист Мёбиуса.) Пусть $A$ — кольцо непрерывных функций на $R$, имеющих период 1, и $M$ — кольцо непрерывных функций на $R$, удовлетворяющих тождеству $f(x+1) = -f(x)$. На $M$ имеется очевидная структура $A$-модуля.

а) Покажите, что $M$ не является свободным $A$-модулем.

б) Покажите, что $M \oplus M \simeq A^2$.

Результаты следующих задач будут использованы в дальнейшем.

**3.** (Теорема Гамильтона–Кэли.)

а) Пусть $A$-модуль $M$ порожден элементами $m_1, \ldots, m_n$, и пусть $n \times n$-матрица $X = \|f_{ij}\|$ с элементами из $A$ обладает тем свойством, что $\sum_j f_{ij} m_j = 0$ для всех $i$. Покажите, что $\det(A) \in \operatorname{Ann}(M)$.

б) Пусть $A$-модуль $M$ порожден элементами $m_1, \ldots, m_n$, и пусть $\varphi \in \operatorname{End}_A(M)$ можно задать матрицей $X = \|f_{ij}\| \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(A)$ (т.е. $\varphi(m_i) = \sum f_{ij} m_j$). Покажите, что $P_X(\varphi) = 0$, где $P_X$ — характеристический многочлен. (Указание: введите на $M$ структуру $A[T]$-модуля.)

**4.** (Целая зависимость: определения.) Пусть $A$ —подкольцо в $B$ и $f \in B$. Покажите, что следующие три условия эквивалентны:

(i) $f^n + a_1 f^{n-1} + \ldots + a_{n-1} f + a_n = 0$ для некоторого $n > 0$ и $a_1, \ldots, a_n \in A$.

(ii) Подкольцо $A[f] \subset B$ конечно порождено как $A$-модуль.

(iii) Существует такой $A[f]$-модуль $M$, что $\operatorname{Ann}_{A[f]}(M) = 0$ и $M$ конечно порожден как $A$-модуль.

Если выполнены эти условия, то говорят, что $f$ цел над $A$. Если подкольцо $A \subset B$ таково, что всякий $f \in B$ цел над $A$, то говорят, что $B$ цело над $A$.

**5.** (Целая зависимость: свойства.) Докажите, что:

а) Если кольца $A \subset B \subset C$ таковы, что $B$ цело над $A$ и $C$ цело над $B$, то $C$ цело над $A$.

б) Если $A \subset B$ и $f, g \in B$ целы над $A$, то $f \pm g$ и $fg$ целы над $A$.

**6.** (Целая зависимость: примеры.)

а) Пусть $A$ — факториальное кольцо и $K$ — поле частных $A$. Покажите, что $f \in K$ цел над $A$ тогда и только тогда, когда $f \in A$.

б) Пусть $m \in \mathbb{Z}$ не делится на квадраты. Выясните, какие элементы поля $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ целы над $\mathbb{Z}$.