Коммутативная алгебра (весна 2006)
Листок 6

1. Покажите, что если (в нётеровом кольце) радикал идеала $\mathfrak{a}$ максимален, то идеал $\mathfrak{a}$ примарен.

2. Покажите, что идеал $\mathfrak{q}$ в нётеровом кольце A является примарным тогда и только тогда, когда в $A/\mathfrak{q}$ всякий делитель нуля нильпотентен.

3. Пусть k — поле, $A = k[X,Y,Z]$ и $\mathfrak{a} = (XQ, YQ, ZQ)$, где Q — квадратичная форма. Найдите $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{a})$.

4. Пусть M — конечно порожденный модуль над нётеровым кольцом. Покажите, что $\mathrm{Ass}(M)$ совпадает с множеством общих точек неприводимых компонент носителей всевозможных подмодулей $N \subset M$.

5. Пусть k — поле, $A = k[X,Y,Z]/(XY - Z^2)$, $\mathfrak{p} = (\bar{Y}, \bar{Z}) \subset A$ (через $\bar{X}$, $\bar{Y}$ и $\bar{Z}$ обозначаются образы X, Y и Z в A).

а) Найдите $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{p}^2)$.

б) Найдите хотя бы одно минимальное примарное разложение $\mathfrak{p}^2$.

в) Найдите два разных минимальных примарных разложения $\mathfrak{p}^2$.

6. Пусть k — поле, $A = k[X,Y]$ и $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ — пары натуральных чисел. Обозначим через $\mathfrak{a}$ идеал, порожденный всеми мономами вида $X^{a_i}Y^{b_i}$.

а) Найдите какое-нибудь примарное разложение идеала $\mathfrak{a}$.

б) В каких случаях у него имеются вложенные ассоциированные идеалы?

в) Для случаев, когда вложенные идеалы есть, укажите в явном виде бесконечно много минимальных примарных разложений.