Коммутативная алгебра (весна 2006)
Листок 7

1. Пусть $A \subset B$ — целое расширение колец и $\varphi\colon A \to k$ — гомоморфизм, где k — алгебраически замкнутое поле. Покажите, что φ продолжается до гомоморфизма из B в k.

2. Пусть k — поле, $A = k[X]$, $B = k[X,Y]/(XY-1)$. Цело ли B над A?

3. Пусть k — поле, $A = k[X,Y]$, $B = \{f \in A\colon \frac{\partial f}{\partial X}(0,0)\}$. Цело ли A над B?

4. Пусть $X = \mathbb{R}^2$ и A — кольцо непрерывных функций на X. Если $u, v \in X$ — две различные точки и $B \subset A$ — кольцо функций, принимающих одинаковые значения в u и v, то цело ли A над B?

5. Пусть $X = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, A — кольцо непрерывных функций на X и $\varphi^*\colon X \to X$ — отображение, переводящее z в z^3 и ∞ в ∞. Обозначим через $\varphi\colon A \to A$ гомоморфизм, действуюший по правилу $f \mapsto f \circ \varphi^*$. Цело ли A над $\varphi(A)$?

6. Пусть A — кольцо, G — конечная группа, действующая автоморфизмами на A. Цело ли A над A^G?

7. Докажите, что в конечно порожденной алгебре над любым (не обязательно алгебраически замкнутым) полем нильрадикал совпадает с радикалом Джекобсона.

8. Докажите аналогичное утверждение про кольца, конечно порожденные над $\mathbb{Z}$.