# Экзамен по курсу “Комплексный Анализ”

весенний семестр 2006 года

**Задача 1.** Найдите круг сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

и докажите, что его сумма не продолжается аналитически за пределы этого круга.

**Задача 2.** Пусть $\{a_j\} \subset \mathbb{C}$ — последовательность комплексных чисел. Найдите все голоморфные в единичном круге функции, принимающие в точках $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ значения $a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots$

**Задача 3.** Пусть функция $f$ имеет в точке $a \in \mathbb{C}$ полюс порядка $n \geq 1$ (т. е. $\operatorname{ord}_a f = -n$). Докажите формулу

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \Big( (z-a)^n f(z) \Big)^{(n-1)},$$

где $g^{(k)}$ обозначает $k$-ую производную функции $g$.

**Задача 4.** Вычислите несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x+1)^2}\, dx$$

**Задача 5.** Пусть функция $f$ голоморфна в единичном круге, а ее вещественная часть $\operatorname{Re} f$ непрерывна в замкнутом единичном круге и тождественно равна нулю на его границе. Докажите, что функция $f$ тождественно равна мнимой константе. Верно ли это утверждение, если $\operatorname{Re} f$ обращается в нуль только на некоторой дуге единичной окружности?

**Задача 6.** Пусть $\Pi_j = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 < x < \alpha_j,\ 0 < y < \beta_j\}$, $j = 1, 2,$ — два прямоугольника в $\mathbb{C}$. Найдите все конформные отображения $\Pi_1$ на $\Pi_2$, переводящие вершины в вершины.

**Задача 7.** Пусть $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ — линейно независимые (над $\mathbb{C}$) целые функции без нулей. Докажите, что всякая их нетривиальная линейная комбинация $h = af + bg$, $a, b \in \mathbb{C}^*$, имеет нули.