**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 4.**
**Группы и алгебры Ли. 13.03.2006**

**Задача 1.** Доказать, что определения коммутатора в касательном пространстве в единице к группе Ли с использованием координат (как в лекциях) и с помощью правоинвариантных векторных полей эквивалентны.

**Задача 2.** Доказать, что дифференциал в единице гомоморфизма групп Ли будет гомоморфизмом алгебр Ли.

**Задача 3.** Доказать, что прямое произведение групп Ли является группой Ли. Как найти соответствующую алгебру Ли?

**Задача 4.** Доказать, что группа Ли всегда ориентируема.

**Задача 5.** Доказать, что если $U$ — некая окрестность единицы в связной группе Ли $G$, то $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U^n = G$, где $U^n$ означает множество всех произведений из $n$ элементов $U$.

**Задача 6.** Пусть $G$ — связная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Доказать, что если коммутатор любых элементов $\mathfrak{g}$ равен нулю, то $G$ абелева (поэтому алгебры Ли с нулевым коммутатором называются абелевыми).

**Задача 7.** Постройте естественные гомоморфизмы групп Ли

а) $SU(2) \longrightarrow SO(3)$,

б) $SU(2) \times SU(2) \longrightarrow SO(4)$.

**Задача 8.** Доказать, что компонента связности единицы является подгруппой Ли.

**Задача 9.** Найти число компонент связности для

а) $GL(n,\mathbb{R})$,

б) $GL(n,\mathbb{C})$,

в) $O(n)$,

г) $SO(n)$,

д) $U(n)$,

е) $SU(n)$.