НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 9.
Характеристические классы. 24.04.2006

Задача 1. Пусть η вещественное расслоение, $\mathbb{C} \otimes \eta$ его комплексификация. Докажите, что $c_{2k+1}(\mathbb{C} \otimes \eta) = 0$, $c_{2k}(\mathbb{C} \otimes \eta) = (-1)^k p_k(\eta)$.

Указание. Посмотрите на полный класс Чженя и воспользуйтесь образующими У.

Задача 2. Пусть ξ комплексное расслоение, $r\xi$ его овеществление.

а) Выразите $p_k(r\xi)$ через классы Чженя расслоения ξ.

б) Докажите, что $\chi(r\xi) = c_n(\xi)$.

Указание. Посмотрите на полный класс Понтрягина и воспользуйтесь образующими У.

Задача 3. Для ориентированной гиперповерхности в евклидовом пространстве $M^{2n} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ выразить классы Эйлера и Понтрягина через первую и вторую квадратичные формы.

Указание. Не забывайте про формулу Уитни для классов Понтрягина!

Задача 4. Докажите, что если у комплексного расслоения ξ есть k не обращающихся в ноль и независимых в каждой точке сечений, то $c_n(\xi) = 0$, $\ldots$, $c_{n-k+1}(\xi) = 0$.

Задача 5. Докажите, что если у ориентированного вещественного расслоения η есть не обращающееся в ноль сечение, то $\chi(\eta) = 0$.

Задача 6. Пусть ξ комплексное расслоение, $\mathrm{rk}\,\xi = k$, а $S^2\xi \subset \xi \otimes \xi$ его симметрический квадрат. Найдите $c_1(S^2\xi)$.

Задача 7. Докажите, что если многообразие M является границей некоторого многообразия W, то все числа Понтрягина M равны нулю.

Указание. Вспомните о функториальности классов Понтрягина и используйте теорему Стокса.

Задача 8. Докажите, что $\mathbb{CP}^2$ не может быть краем какого-либо многообразия.