НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.
Экзамен. 15.05.2006

Решено, что экзамен будет домашним. Условия можно найти на web-странице курса. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо положить в учебной части в почтовую ячейку с моим именем (А. Пенской) не позднее чем через неделю.

Убедительная просьба решать самостоятельно и не откладывать на последний день.

Пересчет баллов в оценки следующий: 30 баллов достаточно для «отлично», 20 для «хорошо», 10 для «удовлетворительно».

Задача 1. Из аналитической геометрии вы знаете примеры поверхностей, на которых есть два различных семейства прямолинейных образующих. Докажите, что если на гладкой двумерной поверхности в трехмерном пространстве есть три различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является куском плоскости. *(6 баллов).*

Задача 2. Пусть $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, параметризованная гладкая кривая на сфере радиуса 1. Построим по ней новую кривую, получающуюся «сдвигом на сфере в нормальном направлении» на фиксированный угол. Формально мы определим это следующим образом. Фиксируем некоторое число φ. В каждой точке $\gamma(t)$ возьмем в касательной плоскости к сфере нормальный к кривой $\gamma(t)$ вектор $n(t)$, причем выберем направления этих нормальных векторов так, чтобы векторное поле $n(t)$ было гладким. Рассмотрим теперь плоскость, проходящую через центр сферы и точку $\gamma(t)$, и содержащую вектор $n(t)$. В этой плоскости рассмотрим образ $\widetilde{\gamma}(t)$ точки $\gamma(t)$ при повороте относительно центра сферы на угол φ в направлении вектора $n(t)$. Полученная кривая $\widetilde{\gamma}(t)$ может быть негладкой. Чему равна максимально возможная константа φ_0, такая что при любом $0 \leqslant \varphi < \varphi_0$ эта кривая неособа при любом выборе направления поля нормалей $n(t)$? *(8 баллов).*

Задача 3. Пусть векторное расслоение ξ ранга k снабжено связностью. Построить связность в одномерном расслоении $\det \xi := \Lambda^k \xi$ и найти ее форму кривизны. *(8 баллов).*

Задача 4. Пусть ранг комплексного векторного расслоения ξ равен k. Выразите первый класс Чженя $c_1(\det \xi)$ через классы Чженя расслоения ξ. *(8 баллов).*

Задача 5*. Найти число Понтрягина

$$\oint_{S^4} p_1(rE),$$

где $E \longrightarrow \mathbb{H}P^1 \simeq S^4$ — универсальное расслоение над кватернионной проективной прямой, а r операция овеществления (не забывайте о некоммутативности кватернионов!) *(20 баллов).*