Домашний экзамен по курсу «Грассманианы и многообразия флагов»

Задача 1. Разложите произведение многочленов Шура $s_{(2,1)} \cdot s_{(2,2)}$ по базису из s_λ.

Задача 2. Пусть K_λ — число стандартных таблиц формы λ. Докажите следующие тождества:

а) $K_\lambda = \sum\limits_{\lambda \in \mu \otimes 1} K_\mu$; **б)** $(1 + |\lambda|)K_\lambda = \sum\limits_{\mu \in \lambda \otimes 1} K_\mu$; **в)** $\sum\limits_{|\lambda| = l} K_\lambda^2 = l!$.

Задача 3. *Всё о многообразиях флагов.* Пусть $\mathrm{Fl}(n)$ — многообразие флагов в $\mathbb{C}^n$, т.е. многообразие, точки которого соответствуют полным флагам $W_\bullet = (W_1 \subset \dots \subset W_{n-1} \subset W_n = V)$, где $\dim W_i = i$.

Пусть $w \in S_n$ — перестановка, $V_\bullet$ — фиксированный флаг. Пусть $r_w(p, q) = \#\{i \le p, w(i) \le q\}$. Определим *клетки Шуберта* C^w условием

$$C^w = \{W_\bullet \in \mathrm{Fl}(n) | \dim(V_p \cap W_q) = r_w(p, q), 1 \le p, q \le n\}.$$

а) Покажите, что $\mathrm{Fl}(n) = \bigsqcup_{w \in S_n} C^w$ и что $C^w \cong \mathbb{A}^{l(w)}$, где $l(w)$ есть число инверсий в перестановке w (это число называется *длиной* перестановки w).

б) Найдите многочлен Пуанкаре $P_{\mathrm{Fl}(n)}(q) = \sum_{k \ge 0} q^k \operatorname{rk} H^{2k}(\mathrm{Fl}(n))$ для кольца когомологий $H^*(\mathrm{Fl}(n))$.

в) Покажите, что $C^v \subset \bar{C}^w$ тогда и только тогда, когда найдутся такие простые транспозиции $t_{i_1}, \dots, t_{i_k}$, где $k = l(w) - l(v)$, для которых $w = vt_{i_1} \dots t_{i_k}$.

г) Пусть $w_0 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ n & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Обозначим фундаментальный класс $[\bar{C}^{w_0 w}] \in H^*(\mathrm{Fl}(n))$ через σ_w. Докажите, что если u и v — перестановки одинаковой длины, то $\sigma_u \cup \sigma_{w_0 v} = \delta_{u,v}$.

Задача 4. Группа $B \subset \mathrm{GL}(n+1)$ верхнетреугольных матриц порядка $n+1$ действует диагональным образом на прямом произведении $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. Опишите орбиты этого действия и отношения примыкания между ними, если

а) $n = 2$; **б)** n произвольно.

Вопросы по условиям можно задавать по адресу `smirnoff@mccme.ru`. Решения следует сдать в учебную часть до 25 мая 2006 года. Не забудьте подписать работу.

Желаю успехов!