Задачи к спецкурсу
“Полиномиальные представления полной линейной группы”

1. Пусть X и Y — множества, K — поле и $f \in A \otimes_K B$, где A и B — подпространства в K^X и K^Y соответственно. Докажите, что если $X_0 \subset X$, $Y_0 \subset Y$ и $f(X_0 \times Y_0) = 0$, то $f \in A_0 \otimes B + A \otimes B_0$, где $A_0 = \{a \in A : a(X_0) = 0\}$ и $B_0 = \{b \in B : b(Y_0) = 0\}$. Выведете отсюда, что если некоторое тождество выполнено на подгруппе алгебраической группы, то оно также выполнено и на замыкании этой подгруппы.

2. Пусть $V \in M_K(n)$. Докажите, что $V = \bigoplus_{r \geqslant 0} V_r$, где $V_r \in M_K(n,r)$.

3. Пусть $\lambda \in \Lambda^+(n,r)$, $n > 1$ и $\mu(1), \ldots, \mu(N)$ — последовательность всех разбиений μ длины $n-1$ таких, что $\lambda_{i+1} \leqslant \mu_i \leqslant \lambda_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$, упорядоченная так, что из $\mu(i) > \mu(j)$ следует $i < j$. Докажите, что существует фильтрация $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_N = V_{\lambda,K}$, состоящая из GL_{n-1}-подмодулей такая, что $V_i/V_{i-1} \cong V_{\mu(i),K}$.

4. Пусть $\rho = (n-1, \ldots, 1, 0)$. Для любого набора $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ положим $A_\nu = \det\{X_i^{\nu_j}\}_{i,j=1}^n$. Докажите, что характер $\chi(\lambda)$ модуля Вейля $V_{\lambda,K}$ равен $A_{\lambda+\rho}/A_\rho$.

5. Докажите, что если $\lambda \in \Lambda^+(n,r)$ и $\lambda \in \Lambda^+(n,s)$, то
$$\chi(\lambda)\chi(\mu) = \sum_{\lambda+\nu \in \Lambda^+(n,r+s)} m(\nu)\chi(\lambda+\nu),$$
причем $m(\nu) \leqslant \dim V^\nu_{\mu,K}$. *Указание.* Покажите, что модуль $V_{\lambda,K} \otimes V_{\mu,K}$ порожден как GL_n-модуль подпространством $V^\lambda_{\lambda,K} \otimes V_{\mu,K}$.

6. Докажите, что если в предыдущей задаче $\nu \sim \mu$ (ν и μ сопряжены под действие группы Вейля) и вес $\lambda+\nu$ доминантный, то $m(\nu) = \dim V^\nu_{\mu,K} = 1$.

7. Пусть $\lambda \in \Lambda^+(n,r)$ и $\chi(\lambda) = \sum_{\mu \in \Lambda^+(n,r)} a(\lambda,\mu)\Phi_{\mu,K}$, где $\Phi_{\mu,K}$ — характер простого GL_n-модуля $F_{\mu,K}$ со старшим весом μ. Докажите, что если $a(\lambda,\mu) \neq 0$, то существует $\sigma \in S_n$ такая, что $\lambda_i - i \equiv \mu_{\sigma(i)} - \sigma(i) \pmod p$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

8. Пусть E — пространство естественного представления группы GL_n, $r \leqslant n$ и $\lambda \in \Lambda^+(n,r)$. Докажите, что $F_{\lambda,K}$ изоморфно подмодулю модуля $E^{\otimes r}$ тогда и только тогда, когда λ p-регулярно по столбцам, где $p = \mathrm{char} K$.

9. Обозначим через B_n^- подгруппу в GL_n, состоящую из нижних треугольных матриц. Для $\lambda \in \Lambda^+(n,r)$ положим
$$\chi^\lambda \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & t_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & t_n \end{pmatrix} = t_1^{\lambda_1} \cdots t_n^{\lambda_n}.$$
Докажите, что $D_{\lambda,K}$ состоит из ровно из тех элементов $c \in A_K(n,r)$, для которых равенство $c \circ b = \chi^\lambda(b)c$ выполнено для всех $b \in B_n^-$.

10. Пусть $V \in M_K(n,r)$ и V порожден как GL_n-модуль вектором $v \in V^\lambda$, который остается на месте при действии на него любой верхней треугольной матрицей с единицами на диагонали. Докажите, что тогда V — гомоморфный образ модуля Вейля $V_{\lambda,K}$. *Указание:* Используйте предыдущую задачу.