Задачи к миникурсу "16-я проблема Гильберта для предельных циклов"

Обозначим через V класс векторных полей на S^2 имеющих конечное число особых точек, одна из которых—отталкивающая (репеллер).

Теорема Пуанкаре-Бендиксона. *Если положительная полутраектория принадлежит области с компактным замыканием, не содержащей особых точек поля, то она либо сама является периодической траекторией, либо наматывается на периодическую траекторию.*

1. Доказать, что ω-предельное множество любой непостоянной траектории векторного поля класса V является либо периодической орбитой, либо полициклом (объединением конечного числа особых точек и соединяющих их орбит).

Пусть B—область с компактным замыканием, на границе которой векторное поле направлено строго внутрь области. Такая область называется *поглощающей.*

2. Доказать, что поле класса V имеет поглощающую область, гомеоморфную диску.

3. Пусть векторное поле v имеет поглощающую область B с гладкой границей, гомеоморфную диску. Максимальным аттрактором поля v в области B называются

$$A_{\max} = \cap_{t>0} g_v^t B,$$

где g_v^t—преобразование фазового потока поля v за положительное время. Доказать, что максимальный аттрактор поля v в области B обладает следующими свойствами

3а. Максимальный аттрактор инвариантен относительно фазового потока поля v.

3б. Максимальный аттрактор является объединением всех полных орбит (соответствующих решениям, определенным на всей оси времен).

3в. Максимальный аттрактор "устойчив по Ляпунову": для любой его окрестности U существует такое положительное время t, что $g^t B \subset U$.

Определение. *Полицикл* векторного поля—это "сепаратрисный многоугольник", т.е. объединение конечного числа особых точек и соединяющих их траекторий. Полицикл называется *монодромным,* если для него можно определить аналог отображения Пуанкаре, но только на полуинтервале (подробное определение опущено для краткости).

4. Доказать, что если векторное поле класса V имеет счетное число предельных циклов, то

а) существует последовательность этих циклов, накапливающихся к полициклу;

б) этот полицикл—монодромный.

5. Доказать, что

а) Предельные циклы аналитического векторного поля на плоскости не могут накапливаться к егоособой точке с линейной частью типа центр;

б) Это неверно для гладкого поля.

6. Доказать, что внутри замкнутой орбиты векторного поля на плоскости лежит особая точка этого поля.

Квадратичное векторное поле—это поле на плоскости, заданное полиномами второй степени.

7. Прямая, проходящая через 2 особые точки квадратичного векторного поля, не имеет контактов с этим полем вне особых точек.

8. Замкнутая фазовая кривая квадратичного векторного поля выпукла.

9. Поворотом поля можно разрушить кратные циклы и седловые связки.

Определение. Цикличность полицикла в семействе векторных полей—это максимальное число предельных циклов, которые рождаются из этого полицикла в этом семействе.

10. Функция на компакте ограничена, если и только если ее колебание в каждой точке ограничено.

11. Доказать, что число предельных циклов в семействе уравнений с компактной базой на сфере ограничено, если и только если цикличность каждого полицикла в этом семействе конечна. (Руссари)

12. Может ли немонодромный полицикл породить предельные при бифуркации?