Задачи к миникурсу “16-я проблема Гильберта для предельных циклов” часть 2

1. Опираясь на принцип сведения, дать топологическую классификацию фазовых портретов векторных полей на плоскости в окрестности элементарной особой точки. Предполагается, что векторные поля удовлетворяют условию Лоясевича.

2. Нарисовать фазовые портреты уравнений семейства

$$\dot x = x^2 = \varepsilon, \ \dot y = -y \tag{1}$$

(возмущение седлоузла)

3. Пусть семейство векторных полей в окрестности седлоузла C^∞ эквивалентно семейству (1). Пусть при $\varepsilon = 0$ уравнение семейства имеет гомоклиническую траекторию седлоузла: сепаратриса возвращается в параболический сектор особой точки. Доказать, что при $\varepsilon > 0$ из этой траектории рождается предельный цикл.

4. Записать формальные нормальные формы элементарных особых точек, даваемые теоремой Пуанкаре–Дюлака. Как изменится ответ, если предположить, что векторные поля удовлетворяют условию Лоясевича?