Задачи к миникурсу “16-я проблема Гильберта для предельных циклов” часть 3

Следующие две задачи содержат доказательство критерия Пуанкаре-Понтрягина.

1. При каком условии на возмущение ω кривая $r = c$ на цилиндре с координатами r, ϕ рождает предельный цикл при прохождении ε через 0 в семействе

$$dr + \varepsilon\omega = 0?$$

2. Свести к предыдущей задачу о рождении предельного цикла из овалов полинома H при возмущении

$$dH + \varepsilon\omega = 0.$$

3. Рассмотрим линейное $N + 1$-мерное пространство аналитических функций на отрезке. Доказать, что для любого набора из N точек существует функция из этого пространства, имеющая изолированные нули во всех точках набора. Доказать, что это неверно, если N заменить на $N + 1$.

4. Доказать аналог теоремы о неявной для голоморфных функций.

*5. Доказать, что существуют квадратичные векторные поля с двукратными предельными циклами.

6. Пусть $N + 1$ -размерность пространства многочленов от двух переменных степени $n - 1$. Доказать, что для любых N овалов любого ультра-Морсовского многочлена степени $n + 1$ найдется полиномиальное векторное поле степени n, имеющее N предельных циклов, сколь угодно близких к выбранным овалам.