ДОМАШНИЙ ЭКЗАМЕН
28.04.2006 – 31.05.2006

Задача 1. Разложите на неприводимые представление SO_3 линейными заменами переменных в однородных многочленах степени d от трёх переменных.

Задача 2. Для данной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ пусть U — нетривиальное представление наименьшей размерности.

a) Докажите, что U — неприводимое представление, старший вес которого совпадает с одним из фундаментальных весов.

b) Найдите размерность U для $\mathfrak{g}$, заданной диаграммой G_2.

c) Найдите размерность U для $\mathfrak{g} = sp_{2n}$, $n \geq 1$.

d) Найдите размерность U для $\mathfrak{g} = so_n$, $n \geq 3$.

Задача 3. Разложите на неприводимые представления

a) Тензорный квадрат присоединённого представления sl_n.

b) Симметрический и внешний квадрат присоединённого представления sl_n.

Задача 4. Пусть $\mathfrak{a}$ — подалгебра so_5, порождённая корневыми пространствами длинных корней.

a) Докажите, что $\mathfrak{a}$ изоморфна $sl_2 \oplus sl_2$ и получается естественным вложением so_4 в so_5.

b) Разложите на неприводимые представления ограничение векторного, спинорного и присоединённого представления so_5 на $\mathfrak{a}$.

c) Докажите, что кратности вхождения неприводимых представлений в ограничение неприводимого представления so_5 на $\mathfrak{a}$ не превышают единицу.

d) Какие неприводимые представления $\mathfrak{a}$ входят в ограничение неприводимого представления so_5 с данным старшим весом на $\mathfrak{a}$?

Задача 5. Пусть ω — фундаментальный вес sl_2.

a) Постройте нетривиальное расширение модуля Верма $M_{-2\omega}$ с помощью M_0 (то есть модуль P в точной последовательности

$$0 \to M_0 \to P \to M_{-2\omega} \to 0,$$

не изоморфный $M_0 \oplus M_{-2\omega}$).

b) При каких m и n существует нетривиальное расширение $M_{m\omega}$ с помощью $M_{n\omega}$?

Решения задач в письменном виде сдавайте не позднее **31 мая (среда)** С.М.Львовскому (или в его почтовую ячейку). Вопросы можно (и нужно) задавать по адресу **loktev@mccme.ru** (но не ждите ответов до 10 мая).