ЗАДАНИЕ 1
СПИНОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Пусть V — n-мерное комплексное векторное пространство с невырожденной квадратичной формой. Определим *алгебру Клиффорда* $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C})$ как ассоциативную алгебру с единицей от образующих V с соотношениями

$$v_1v_2 + v_2v_1 = (v_1, v_2)\cdot 1.$$

Задача 1. Докажите, что $\mathrm{Cl}_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ как алгебра.

Задача 2. Докажите, что естественная проекция $T^*(V) \to \mathrm{Cl}_n(\mathbb{C})$ задаёт канонический изоморфизм векторных простанств $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C}) \cong \wedge^*(V)$.

Задача 3. Докажите, что подпространство $V\wedge V \subset \mathrm{Cl}_n(\mathbb{C})$ образует алгебру Ли, изоморфную $so_n(\mathbb{C})$.

Пусть n — чётно. Тогда можно считать, что $V = U\oplus U^*$ и скалярное произведение спаривает U с U^*. Определим действие $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C})$ на $\wedge^*(U)$ так, что элементы U действуют умножением, а элементы U^* — дифференцированием.

Задача 4. Докажите, что такое действие задаёт изоморфизм $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C}) \cong \mathrm{End}\,(\wedge^*(U))$.

Задача 5. Докажите, что $\wedge^{\mathrm{even}}(U)$ и $\wedge^{\mathrm{odd}}(U)$ являются представлениями $so_n(\mathbb{C})$. Вычислите их характеры.

Задача 6. Докажите, что $\wedge^{\mathrm{even}}(U)$ и $\wedge^{\mathrm{odd}}(U)$ неприводимы, вычислите отметки старшего веса. Соответствующие представления называются *спинорными*.

Пусть теперь n — нечётно.

Задача 7. Докажите, что образ ω формы объёма принадлежит центру и $\omega^2 = \pm 1$.

Задача 8. Постройте два неизоморфных представления $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C})$ в $\wedge^*(U)$ для максимального изотропного подпространства U. Докажите, что $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C}) \cong \mathrm{End}\,(\wedge^*(U)) \oplus \mathrm{End}\,(\wedge^*(U))$.

Задача 9. Разложите на неприводимые ограничения этих представлений на $so_n(\mathbb{C})$, вычислите их отметки старшего веса (они должны совпасть и соответствующее представление также называется *спинорным*).

Задача 10. Действует ли группа $SO_n(\mathbb{C})$ на спинорных представлениях?