ЗАДАНИЕ 3
СУПЕРГРУППА БРАУЭРА

Назовём *супералгеброй* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированную ассоциативную алгебру с единицей, то есть в которой $A = A^0 \oplus A^1$, $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j \bmod 2}$. Элементы A^0 называются *чётными*, элементы A^1 — *нечётными*. Для градуированных элементов определим $d(a) = i$ при $a \in A^i$.

Задача 1. Докажите, что единица всегда чётна.

Пусть $\mathrm{Cl}(V)$ — алгебра Клиффорда от векторного пространства V над произвольным полем с невырожденной симметричной билинейной формой.

Задача 2. Определите структуру супералгебры на $\mathrm{Cl}(V)$ так, что образующие (векторы из V) — нечётны.

Задача 3. Пусть $V = V^0 \oplus V^1$ — градуированное пространство. Определите структуру супералгебры на $\mathrm{End}(V)$ так, чтобы для $a \in \mathrm{Hom}(V_i, V_j)$ выполнялось $d(a) = i + j \bmod 2$.

Определим тензорное произведение супералгебр $A \otimes B$ с умножением

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (-1)^{d(b_1)d(a_2)} a_1 \cdot a_2 \otimes b_1 \cdot b_2.$$

При этом $d(a \otimes b) = (d(a) + d(b)) \bmod 2$.

Задача 4. Докажите ассоциативность тензорного умножения. Постройте изоморфизм между $A \otimes B$ и $B \otimes A$.

Задача 5. Докажите, что $\mathrm{Cl}(U \oplus V) \cong \mathrm{Cl}(U) \otimes \mathrm{Cl}(V)$ как супералгебры.

Назовём ассоциативную алгебру *полупростой*, если она является прямой суммой своих левых (эквивалентно, правых) идеалов (структура супералгебры не влияет на это определение).

Задача 6. Докажите, что тензорное произведение полупростых супералгебр — полупросто.

Будем говорить, что градуированные элементы a и b — *коммутируют*, если $a \cdot b = (-1)^{d(a)d(b)} b \cdot a$. *Центром* супералгебры называется подпространство градуированных элементов, коммутирующих со всей супералгеброй.

Задача 7. Докажите, что центр тензорного произведения супералгебр совпадает с тензорным произведением центров.

Назовём супералгебру *центральной*, если её центр состоит из скаляров. Будем называть супералгебру *центральной простой*, если она центральна и полупроста.

Задача 8. Докажите, что центральная простая супералгебра не представима в виде прямой суммы двух супералгебр. Всегда ли она проста как алгебра?

Задача 9. Докажите, что алгебры Клиффорда над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — центральные простые.

Задача 10. Докажите, что алгебры $\mathrm{End}(V)$ — центральные простые.

Определим *сопряжённую* супералгебру A^{opp}, изоморфную A как векторное пространство, в котором произведение a на b равно $(-1)^{d(a)d(b)} b \cdot a$.

Задача 11. Докажите, что сопряжённая к центральной простой — центральная простая.

Задача 12. Докажите, что $A \otimes A^0$ изоморфна супералгебре $\mathrm{End}(A)$.

Определим *Морита-эквивалентность* на множестве супералгебр, полагая эквивалентными A и $A \otimes \mathrm{End}(V)$.

Задача 13. Докажите, что классы центральных простых супералгебр по Морита-эквивалентности образуют группу относительно тензорного произведения.

Эта группа и называется *супергруппой Брауэра*.