ЗАДАНИЕ 4
ПЕРИОДИЧНОСТЬ АЛГЕБР КЛИФФОРДА

Пусть D — центральная простая алгебра над полем K. Рассмотрим супералгебры $D[\epsilon_+]$ и $D[\epsilon_-]$, такие, что $D[\epsilon_\pm]^0 \cong D$, $D[\epsilon_\pm]^1 \cong \epsilon_\pm D$, $\epsilon_\pm x = x\epsilon_\pm$ для $x \in D$, $\epsilon_+^2 = 1$, $\epsilon_-^2 = -1$.

Задача 1. Докажите, что $D[\epsilon_+]$ и $D[\epsilon_-]$ — центральные простые супералгебры. Изоморфны ли они между собой для $K = \mathbb{C}$? А для $K = \mathbb{R}$?

Задача 2. Докажите, что в $\mathrm{sBr}(\mathbb{C})$ класс $\mathrm{Cl}_{2n}(\mathbb{C})$ представлен $\mathbb{C}$, а класс $\mathrm{Cl}_{2n+1}(\mathbb{C})$ представлен $\mathbb{C}[\epsilon_+]$.

Определим супералгебры $\mathbb{C}\{\epsilon_\pm\}$ над $\mathbb{R}$ такие, что $\mathbb{C}\{\epsilon_\pm\}^0 \cong \mathbb{C}$, $\mathbb{C}\{\epsilon_\pm\}^1 \cong \epsilon_\pm\mathbb{C}$, $\epsilon_\pm z = \overline{z}\epsilon_\pm$ для $z \in \mathbb{C}$, $\epsilon_+^2 = 1$, $\epsilon_-^2 = -1$.

Задача 3. Докажите, что $\mathbb{C}\{\epsilon_+\}$ и $\mathbb{C}\{\epsilon_-\}$ — центральные простые супералгебры. Изоморфны ли они друг другу?

Пусть $\mathrm{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})$ — алгебра Клиффорда от вещественного векторного пространства с билинейной симметричной формой сигнатуры (p, q).

Задача 4. Докажите, что в $\mathrm{sBr}(\mathbb{R})$ класс $\mathrm{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})$ обратен классу $\mathrm{Cl}_{q,p}(\mathbb{R})$

Задача 5. Докажите, что в $\mathrm{sBr}(\mathbb{R})$ класс $\mathrm{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})$ зависит только от $p - q \bmod 8$ и равен

$p - q \bmod 8$	$[\mathrm{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})]$
0	$\mathbb{R}$
1	$\mathbb{R}[\epsilon_+]$
2	$\mathbb{C}\{\epsilon_+\}$
3	$\mathbb{H}[\epsilon_-]$
4	$\mathbb{H}$
5	$\mathbb{H}[\epsilon_+]$
6	$\mathbb{C}\{\epsilon_-\}$
7	$\mathbb{R}[\epsilon_-]$

Задача 6. Чему изоморфны супералгебры из этой таблицы как полупростые ассоциативные алгебры?

Задача 7. Чему изоморфны $\mathrm{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})$?

Задача 8. Докажите, что $\mathrm{sBr}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 9. Докажите, что $\mathrm{sBr}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.