ДОМАШНИЙ ЭКЗАМЕН
11.09.2006 – 2.10.2006

Задача 1. Разложите на неприводимые представление SO_4 линейными заменами переменных в однородных многочленах степени d от четырёх переменных.

Задача 2. Сколько существует представлений a) sl_n, b) sp_n, c) so_n, размерность которых меньше размерности присоединенного представления?

Задача 3. Разложите на неприводимые представления
a) Тензорный квадрат присоединённого представления so_{2n}.
b) Симметрический и внешний квадрат присоединённого представления so_{2n}.

Задача 4. Пусть $\mathfrak{a}$ — подалгебра so_7, порождённая корневыми пространствами длинных корней.
a) Докажите, что $\mathfrak{a}$ изоморфна sl_4 и получается естественным вложением so_6 в so_7.
b) Разложите на неприводимые представления ограничение векторного и присоединённого представления so_7 на $\mathfrak{a}$.
c) Докажите, что кратности вхождения неприводимых представлений в ограничение неприводимого представления so_7 на $\mathfrak{a}$ не превышают единицу.
d) Какие неприводимые представления $\mathfrak{a}$ входят в ограничение неприводимого представления so_7 с данным старшим весом на $\mathfrak{a}$?

Задача 5.
a) Постройте представление sl_2 с базисом v_i, $i \in \mathbb{Z}$, в котором

$$fv_i = v_{i-1}, \qquad hv_i = (2i+\lambda)v_i, \qquad ev_0 = \mu v_1.$$

b) При каких значениях λ и μ оно будет приводимо?

Решения задач в письменном виде сдавайте не позднее **2 октября (понедельник)** С.М.Львовскому (или в его почтовую ячейку). Вопросы можно (и нужно) задавать по адресу **loktev@mccme.ru**.