НМУ, геометрия в механике и физике.
Домашний экзамен. Выдан 26.05.2006.

На решение отводится 2 недели, решение необходимо положить в ячейку с моим именем (А. Пенской) в учебной части. Критерии оценки: «отлично» за 4 задачи, «хорошо» за 3 задачи, «удовлетворительно» за 2 задачи.

Просьба оперативно сообщать обо всех замеченных опечатках и ошибках.

Задача 1. Проинтегрировать уравнения движения материальной точки, движущейся по поверхности конуса с углом 2α при вершине, расположенного вертикально, вершиной вниз, в поле тяжести.

Задача 2. Рассмотрим задачу Кеплера о движении материальной точки в поле $U = -\alpha/r$, это хорошо известный нам случай с замкнутыми орбитами. Добавим теперь к $U(r)$ маленькое возмущение $\delta U(r)$. Орбиты перестанут быть замкнутыми, перигелий после каждого оборота будет смещаться на малую величину $\delta\varphi$. Найти формулу для смещения перигелия если $\delta U(r) = \beta/r^2$.

Задача 3. Рассмотрим как на лекциях модель Фридмана с соответствующей метрикой вида

$$ds^2 = a(\eta)(d\eta^2 - dl_1^2),$$

где $a(\eta)$ произвольная функция (мы не уточняем вид материи), а dl_1^2 метрика на $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{L}^3$. Рассмотрим уравнения Максвелла электромагнитного поля в такой метрике (мы считаем, что электромагнитное поле слабое и на гравитационное поле не влияет). Найдите приближённые решения вида

$$A(x,t) = e^{i\omega t}\tilde{A}(x), \quad cdt = ad\eta, \quad \omega >> a^{-1},$$

это электромагнитные волны, а ω частота.

Задача 4. Докажите, что в условиях предыдущей задачи $\omega a = const$. Эта совершенно замечательная формула объясняет «красное смещение»: сдвиг в красную сторону спектральных линий (то есть уменьшение частоты) у удалённых галактик происходит вследствие расширения вселенной.

Задача 5. Из предыдущей задачи следует, что чем дальше галактика, тем больше смещение. Пусть ω частота излучения сейчас, в момент η, а ω_0 его частота в момент испускания $\eta-\chi$, тогда $\omega = \omega_0 \dfrac{a(\eta-\chi)}{a(\eta).}$ Используя разложение этой формулы по χ в ряд Тейлора в нуле с точностью до χ^2, докажите, что если излучение прошло «малое» расстояние $l = a\chi$, то относительное изменение частоты $z = \dfrac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$ равно $\frac{H}{c}l$, где $H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$ постоянная Хаббла, то есть красное смещение пропорционально расстоянию до галактики. Постоянная Хаббла может быть благодаря этому непосредственно измерена и равна приблизительно $0,8 \cdot 10^{-10}$год$^{-1}$, что позволило нам грубо оценить на лекциях возраст вселенной.

Задача 6. Пусть M компактное риманово многообразие, E эрмитово векторное расслоение над M. Пусть $\varphi \in \Gamma(M,E)$ сечение E, а ∇ согласованная с эрмитовой структура связность в этом расслоении. Рассмотрим функционал

$$S(\varphi,\nabla) = \int_M (|F|^2 + |\nabla\varphi|^2 + m^2|\varphi|^2)\eta,$$

где F кривизна ∇, m некоторая константа («масса»), а η форма объёма. Найдите уравнения Эйлера-Лагранжа $\frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial \bar{\varphi}} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial \nabla} = 0$, описывающие систему из массивного комплексного векторного поля и поля Янга-Миллса.