Экзамен по курсу "Колчаны в теории представлений".

Для получения оценки "отлично"необходимо решить три задачи, "хорошо" — две, "удовлетворительно" — одну.

Решения задач (кроме пятой) необходимо представить в письменном виде до 25 сентября 2006 года. По поводу пятой задачи необходимо договариваться по e-mail (mironovd@mccme.ru).

Задача 1. Пусть X — левый A-модуль. Определим $DX = Hom_k(X, k)$. *Преобразованием Ауслендера-Ритена* левого A-модуля X называется модуль $\tau X = D\operatorname{Ext}^1(X, A)$. Также определяется $\tau^- X = \operatorname{Ext}^1(DX, A) = \operatorname{Ext}^1(DA, X)$. Докажите что:

a) Если X - непроективен, то $\operatorname{Hom}(X, P) = 0$ для всех проективных A-модулей P, и $\tau^-\tau X \cong X$.

b) Если X - неинъективен, то $\operatorname{Hom}(X, I) = 0$ для всех инъективных A-модулей I, и $\tau\tau^- X \cong X$.

c) τ и τ^- задают взаимообратные отображения:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{непроективные} \\ \text{неразложимые представления} \end{array} \right\} \underset{\tau^-}{\overset{\tau}{\begin{array}{c}\longrightarrow\\ \longleftarrow\end{array}}} \left\{ \begin{array}{c} \text{неинъективные} \\ \text{неразложимые представления} \end{array} \right\}$$

Задача 2. Найдите множество орбит, их коразмерности и примыкания, $\operatorname{Hom}(\cdot,\cdot)$, $\operatorname{Ext}(\cdot,\cdot)$ между их представителями для колчана $Q = \hat{A}_2$ и вектора размерности $d = (n, n)$.

Задача 3. Вычислите пространство модулей для колчана $Q = \hat{A}_2$, вектора размерности $d = (n, n)$ и характера $\theta = (-1, 1)$.

Задача 4. Вычислите группы $K_0(\operatorname{Rep} Q)$ для колчанов:

a) Q имеет матрицу Картана $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $Q = D_4$, то есть матрица Картана Q имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Докажите теорему Каца для поле характеристики 0.

***** Эта задача предусматривает только устный ответ. Для подготовки ответа можно пользоваться статьей:

Kraft H., Riedtmann, Ch., Geometry of representations of quivers. Representations of algebras (Durham, 1985), 109–145, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 116, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.