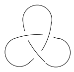
МК НМУ, Топология, листок 1 9.02.06

Поверхности.

1. Покажите, что прямое произведение двух топологических пространств является топологическим пространством.

2. Гомеоморфны ли (a) окружность S^1 и узел трилистник $\mathrm{Tr}=$  ? (b) $\mathrm{S}^1\times\mathrm{Tr}$ и S^2?

3. Сколько существует различных одномерных многообразий?

4. Приведите пример взаимно-однозначного непрерывного отображения, не имеющего непрерывного обратного.

5. Нарисуйте $\mathrm{S}^2\#\mathrm{S}^2$, $\mathrm{S}^2\#\mathrm{T}^2$, $\mathrm{T}^2\#\mathrm{T}^2$, $\mathrm{T}^2\#\mathrm{T}^2\#\mathrm{T}^2$, $\mathrm{Kl}\#\mathrm{Mb}$.

6. Что получится, если к ленте Мебиуса приклеить по краю диск? другую ленту Мебиуса?

7. Крендель разрезали на два тора без дисков, отметили на каждом им из них направление обхода дырки, после чего склеили обратно так, чтобы положительное направление на одном торе совпало с отрицательным на другом. Что получилось?

8. (a) Покажите, что если поверхность Q можно получить при помощи склейки нескольких многоугольников, то Q можно получить и при помощи склейки одного многоугольника M.

(b) Какое минимальное число вершин необходимо для разрезания сферы на многоугольники? Докажите, что если Q — не сфера, то многоугольник M и его склейку можно выбрать так, что после склейки на Q окажется ровно одна вершина.

(c) Обозначим через P число ребер на поверхности Q. Что можно сказать о поверхности, если $P=1$? Если $P=2$?

9. Как склеить крендель из восьмиугольника? Напишите волшебное слово. Нарисуйте на поверхности кренделя разрезы.

10. Какие поверхности соответствуют слову (a) $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$, (b) $abacb^{-1}c$?

11. Как по слову определить, задает ли оно ориентируемую поверхность или неориентируемую?

12. Пусть α — слово для склейки поверхности M_1, а β — слово для склейки поверхности M_2. Как склеить $M_1\#M_2$?

13. Если Q неориентируема, то с помощью одной переклейки можно добиться того, чтобы какие-то два соседних ребра многоугольника склеивались отображением, сохраняющим ориентацию.

14. Покажите, что $\mathrm{T}^2\#\mathbb{R}\mathrm{P}^2=\mathbb{R}\mathrm{P}^2\#\mathbb{R}\mathrm{P}^2\#\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

15. Покажите, что любую неориентируемую поверхность можно склеить по схеме $a_1a_1a_2a_2...a_ga_g$.

16. Придумайте поверхность, которую нельзя склеить из конечного числа многоугольников.

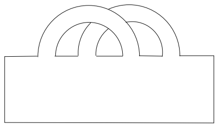
17. Какой поверхности из получившейся классификации гомеоморфно $\mathrm{Kl}\#\mathrm{Kl}$?

18. Сколько схем склейки можно задать на $2n$-угольнике? Сколько из них приведут к ориентируемым поверхностям? Сколько различных, негомеоморфных друг другу поверхностей может получиться? Ответ показывает, как много различных склеек приводят к одинаковым поверхностям.

19. Червяк прогрыз в яблоке сквозной (несамопересекающийся) ход. Какой поверхности гомеоморфна граница продырявленного яблока? Что могло получиться, если поработали два червяка?

20. Придумайте вложение поверхности рода 2 в $\mathbb{R}^3$, у которого есть симметрия порядка 3.

21. К изображенной ниже поверхности с краем приклеили по краю диск. Какая поверхность получилась?



22. Что получится, если две копии поверхности, изображенной выше, склеить по краю?

23. Докажите, что если из замкнутой связной поверхности удалить диск, то получится диск с несколькими приклеенными лентами (как в задаче 21). Всегда ли эти ленты можно сделать неперекрученными? А все, кроме одной?