Факторпространство и дискретные группы.

Говорят, что топологическая группа G (по определению G — хаусдорфово топологическое пространство) *непрерывно действует* на топологическом пространстве X, если для каждого $g \in G$ $x \in X$ отображение $(g, x) \to gx$ является непрерывным отображением $G \times X \to X$ (плюс обычные признаки действия $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$ и $1 \times x = x$).

Через ${}_G\backslash^X$ обозначим множество всех G-орбит точек пространства X, и пусть $\pi : X \to {}_G\backslash^X$ — естественная проекция, заданная равенством $\pi(x) = \{Gx\}$. Наделим ${}_G\backslash^X$ фактортопологией, объявив подмножество $U \in {}_G\backslash^X$ открытым, если его прообраз $\pi^{-1}(U)$ открыт в X.

Разминка.

Задача 1. Пусть на множестве X задана топология конечных дополнений (открытыми считаются все множества вида $X \setminus \{$конечное число точек$\}$ и пустое множество $\emptyset$). Доказать, что если X бесконечно, то X компактно, но не хаусдорфово.

Задача 2. (a) Если X компактно и Y имеет фактортопологию, индуцированную некоторым отображением "на" $f : X \to Y$, то Y компактно.

(b) Всякое непрерывное отображение связного топологического пространства в дискретное топологическое пространство (т.е. такое, где все подмножества открыты) постоянно.

Задачи.

Задача 3. Доказать, что отображение π непрерывно и открыто.

Задача 4. Факторпространство ${}_G\backslash^X$ не обязано быть хаусдорфовым, даже если X — хаусдорфово пространство. Привести пример.

Задача 5. Пусть $K < G$ — замкнутая в G подгруппа. K действует на G левыми сдвигами. Доказать, что ${}_K\backslash^G$ — хаусдорфово пространство.

Задача 6. Пусть X локально компактно и хаусдорфово. Доказать, что факторпространство ${}_G\backslash^X$ компактно тогда и только тогда, когда существует такое компактное подмножество C в X, что $GC = X$.

Подгруппа $\Gamma < G$ называется *дискретной* в группе G, если $\Gamma \cap U_e = \{e\}$ для некоторой окрестности U_e единицы в группе G.

Задача 7. Пусть G — локально компактная группа, а $K < G$ — компактная подгруппа в G. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) подгруппа $\Gamma < G$ дискретна в G.

(2) для любого компакта C из ${}_K\backslash^G$ множество $\{\gamma \in \Gamma | C_\gamma \cap C \neq \emptyset\}$ конечно
(Γ действует правыми сдвигами на факторпространстве ${}_K\backslash^G$).

Задача 8. G и K имеют тот же смысл, что и в задаче 7, а $\Gamma < K$ — любая дискретная подгруппа группы G. Доказать, что для любой точки $z \in {}_K\backslash^G$ существует такая окрестность U, что
$\{\gamma \in \Gamma | U_\gamma \cap U \neq \emptyset\} = \{\gamma \in \Gamma | z\gamma = x\}$.