Индекс векторного поля.

Задача 1. (a) Нарисуйте на комплексоной плоскости векторные поля $v(z) = i$, $v(z) = z$, $v(z) = i * z$. Найдите их индексы $ind_z(v)$ в зависимости от точки z.

(b) Найдите индекс линейного векторного поля $v(z) = az + b$, где a и b — комплексные числа.

Задача 2. Постройте на кренделе векторное поле с изолированными нулями.

Фундаментальная группа.

Задача 3. Покажите, что $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) = \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$

Задача 4. Докажите, что при непрерывном отображении $f : X \mapsto Y$ возникает естественный гомоморфизм групп $f_* : \pi_1(X) \mapsto \pi_2(Y)$.

Задача 5. Докажите, что $\pi_1(S^n) = 0$ при $n > 1$.

Задача 6. (вычисление $\pi_1(S_1)$). Будем считать, что S^1 реализована как $\{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

(a) Докажите, что для каждой петли γ с началом в точке $(1, 0) \in S^1$ существует и единственна *угловая функция* $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами: $\phi(0) = 0$; ϕ непрерывна; $\phi(t)$ равна углу, который образует радиус-вектор точки $\gamma(t)$ с осью абсцисс, плюс слагаемое вида $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ (вообще говоря, k зависит от t).

Целое число $\phi(1)/2\pi$ назовем *индексом* петли γ.

(b) Докажите, что петли γ_1 и γ_2 гомотопны тогда и только тогда, когда их индексы равны. Указание: Рассмотрите *графики* угловых функций.

(c) Как ведет себя индекс при умножении петель? Докажите, что $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Примеры трехмерных многообразий.

Задача 7. Противолежащие грани куба склеили с помощью параллельных переносов. Покажите, что получилось многообразие, гомеоморфное трехмерному тору $\mathbb{T}^3 := S^1 \times S^1 \times S^1$.

Задача 8. Противолежащие грани куба склеили следующим образом: две пары граней с поворотом на угол $+\frac{\pi}{2}$ и одна пару граней с поворотом на угол $-\frac{\pi}{2}$. Получится ли многообразие?

Задача 9. Получится ли многообразие, если противолежащие грани куба склеивать с поворотом на угол π?