02.03.2006.

Листок №4

Меморандум

А) Любое отображение по умолчанию предполагается непрерывным, а любое пространство – "ну, вообще"

Б) Фундаментальная группа переносит нас из топологии в алгебру:

Каждому топологическому пространству X (с отмеченной точкой $*$) сопоставляется группа $\pi_1(X,*)$.

Каждое отображение $\varphi\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм $\varphi_*\colon \pi_1(X,*) \to \pi_1(X,\varphi(*))$, и композиции отображений отвечает композиция гомоморфизмов.

Гомеоморфизм φ индуцирует изоморфизм φ_* фундаментальных групп.

Задачи

1) Если X – линейно-связное пространство, то для любых $x, y \in X$ группы $\pi_1(X,x)$ и $\pi_1(X,y)$ изоморфны. (Внимание: канонического изоморфизма между этими группами, вообще говоря, не существует, но...)

2) Если группа $\pi_1(X,x)$ абелева, то $\pi_1(X,x)$ и $\pi_1(X,y)$ канонически изоморфны.

3) Пусть G – топологическая группа (см. Листок 2). Доказать, что группа $\pi_1(G,1)$ абелева.

4) Привести пример инъективного $\varphi\colon X \to Y$ с неинъективным φ_*.

5) Постройте аналогичный пример, заменив в условии 4) слово "инъективный" на слово "сюръективный".

6) Фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.

Два очень важных факта (7 и 8)

7) Пусть на X дискретно и свободно действует группа $\Gamma <$ HomeoX. Доказать, что естественная проекция $p\colon X \to X/\Gamma$ (см. Листок 2) является накрытием.

8) Доказать, что
$\pi_1(X,*) = \pi_1(X/\Gamma, p(*))/\Gamma$.

9) Найдите двулистное накрытие бутылки Клейна тором.

10) Докажите, что любую неориентируемую поверхность можно двулистно накрыть ориентируемой.

11) Если замкнутая поверхность накрывает тор, то она сама тор. Как построить столистное накрытие тора?

12) Вычислите $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$, $\pi_1(\mathbb{C}P^n)$, $\pi_1(\mathbb{Q}P^n)$
($\mathbb{Q}P^n$ – кватернионное проективное пространство. Что это такое?)

13) Докажите, что фундаментальная группа графа свободна.