Накрытия

Задача 1. Пусть $p : Y \to X$ — накрытие. Гомеоморфизм $h : Y \to Y$ такой, что $p \circ h = p$, называется автоморфизмом накрытия. Автоморфизмы накрытия образуют группу $Aut(Y/X)$. Покажите, что если накрытие универсально, то $Aut(\tilde{X}/X) = \pi_1(X)$. Приведите другой пример накрытия, совпадающего с отображением факторизации по действию группы.

Задача 2. Накрытие $p : Y \to X$ получается факторизацией по действию некоторой группы Γ гомеоморфизмов Y тогда и только тогда, когда $p_*(\pi_1(Y))$ — нормальная подгруппа в $\pi_1(X)$.
В этом случае накрытие $p : Y \to X$ называется *накрытием Галуа* с группой Галуа $Gal(Y/X) = \Gamma$.

Задача 3. Доказать, что $Gal(Y/X) \simeq \pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(Y))$.

Задача 4. Доказать, что в общем случае

$$Aut(Y/X) \simeq (Norm(p_*(\pi_1(Y, y))))/p_*(\pi_1(Y, y)),$$

где $Norm(p_*(\pi_1(Y, y)))$ — это нормализатор подгруппы $p_*(\pi_1(Y, y))$ в группе $\pi_1(X, x)$.

Задача 5. Сколько существует различных 100-листных накрытий тора?

Задача 6. Постройте
(a) двулистное накрытие букета из двух окружностей;
(b) k-листное накрытие букета из двух окружностей;
(c) двулистное накрытие букета из m окружностей;
(d) являются ли построенные накрытия накрытиями Галуа?

Задача 7. Постройте накрытие, не являющееся накрытием Галуа.

Задача 8. Пространство Y k-листно накрывает пространство X эйлеровой характеристики $\chi(X)$. Найдите $\chi(Y)$.

Задача 9. (a) Постройте двулистное накрытие тора без точки $\mathbb{T}^2 \setminus \{pt\}$;
(b) Найдите $\pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{pt\})$.