16.03.2006.

Листок №6

Задачи

1) Вычислить фундаментальную группу поверхности с конечным числом проколов.

2) Покажите, как для любого целого $n > 2$ построить пространство с фундаментальной группой $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

3) Привести пример замкнутого односвязного 4-многообразия, негомеоморфного сфере S^4.

4) Если $p\colon\ X' \to X$ и $q\colon\ Y' \to Y$ – накрытия, то и $p \times q\colon\ X' \times Y' \longrightarrow X \times Y$ – накрытие.

5) Пусть G топологическая группа и $p\colon\ \tilde{G} \to G$ – накрытие, а $\tilde{1} \in \tilde{G}$ – такой элемент, что $p(\tilde{1}) = 1$.
Докажите следующие утверждения:
 1) $\tilde{G}$ является топологической группой с $\tilde{1}$, а отображение p – гомоморфизмом.
 2) Ядро $\ker p$ есть дискретная нормальная подгруппа в $\tilde{G}$.
 3) $\ker p$ лежит в центре группы $\tilde{G}$.
Мораль: если G – непаталогическая топологическая группа, то её накрытия естественно наследуют структуру группы.

6) Пусть $p\colon\ X \to Y$ и $q\colon\ X \to Z$ накрытия. Кроме того, имеется такое непрерывное отображение $r\colon\ Y \to Z$, что $r \circ p = q$. Докажите, что $r\colon\ Y \to Z$ – накрытие.

7) Пусть $p_1\colon\ Y \to X$ и $p_2\colon\ Z \to X$ – накрытия, а $\varphi\colon\ Y \to Z$ – непрерывное отображение. Тогда и φ – накрытие.

8) Вычислить фундаментальную группу тела с двумя ручками ("чучело" кренделя).

9) Пусть X – конечный связный граф. Тогда $\pi_1(X)$ есть свободная группа с $1-e(X)$ образующими, где $e(X)$ – эйлерова характеристика графа.

10) Постройте универсальное накрытие реберного графа тетраэдра. Опишите действие фундаментальной группы на универсальном накрытии.

11) Рассмотрим накрытие $p\colon\ S^2 \to \mathbb{R}P^2$, и пусть γ – "окружность" в $\mathbb{R}P^2$. Опишите прообраз $p^{-1}(\gamma)$ на сфере.