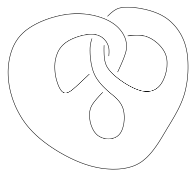
Задачи

Задача 1. Пусть C_1 и C_2 — зацепленные друг за друга окружности в трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$. Можно ли их расцепить в $\mathbb{S}^3$? (т.е. построить семейства окружностей $C_1(t)$, $C_2(t)$ так, чтобы окружности $C_1(0)$ и $C_2(0)$ были зацеплены, окружности $C_1(1)$ и $C_2(1)$ были не зацеплены, и $C_1(t) \cap C_2(t) = \emptyset$ для всех $t \in [0,1]$)?

Задача 2. Найти фундаментальную группу
a) трехмерной сферы с выкинутой окружностью;
b) трехмерной сферы с выкинутыми двумя, зацепленными друг за друга, окружностями;
c) трехмерной сферы с выкинутыми двумя, не зацепленными друг за друга, окружностями.

Задача 3. Какой поверхности из классификации поверхностей гомеоморфна поверхность хлебо-булочного изделия "крендель"? Верно ли, что эти две поверхности, рассматриваемые как вложения абстрактной поверхности в $\mathbb{R}^3$, гомотопны? А изотопны? (иными словами, можно ли расцепить ручки хлебного кренделя, не порвав?)



Задача 4. Обозначим через B_k топологическое пространство, в котором точками являются k попарно различных точек из $\mathbb{R}^2$. Как на нем ввести топологию?
Найдите a) $\pi_1(B_2)$; b*) $\pi_1(B_3)$.

Задача 5. a) Найдите фундаментальную группу двумерной сферы, у которой северный полюс склеили с южным;
b) Найдите фундаментальную группу двумерной сферы, у которой отождествили 3 точки.

Задача 6. Пусть $\mathbb{R}^3_+$ — открытое полупространство в $\mathbb{R}^3$, а C_1 и C_2 — не пересекающие друг друга окружности, ортогональные границе $\mathbb{R}^3_+$.
Найдите a) $\pi_1(\mathbb{R}^3_+ \setminus C_1)$; b) $\pi_1(\mathbb{R}^3_+ \setminus \{C_1, C_2\})$.

Задача 7. Используя теорему ван Кампена, вычислите фундаментальную группу дополнения к узлу трилистнику в $\mathbb{R}^3$. Совпадает ли она с фундаментальной группой дополнения к окружности?

Задача 8. Верно ли, что поверхность яблока с несамопересекающимся ходом изотопна тору?