10. Пространства типа $K(\pi, n)$. Теория препятствий. (14 апреля)

Связный CW-комплекс X называют пространством типа $K(\pi, n)$, если $\pi_n(X) = \pi$, а все остальные гомотопические группы пространства X нулевые.

1. Докажите, что для любого n и любой группы π (абелевой при $n > 1$) существует пространство типа $K(\pi, n)$.

2. Докажите, что для любые два пространства одного и того же типа $K(\pi, n)$ гомотопически эквивалентны.

3. Докажите, что для любого n-мерного CW-комплекса K (с отмеченной вершиной) и любого $(n-1)$-связного пространства X (с отмеченной точкой x_0) имеет место взаимно однозначное соответствие $[K, X] \longleftrightarrow H^n(K; \pi_n(X))$.

4. Докажите, что если K — n-мерный CW-комплекс, то любой элемент группы $H^n(K; \mathbb{Z})$ можно представить в виде $f^*\alpha$, где α — образующая группы $H^n(S^n; \mathbb{Z})$ и $f : K \to S^n$ — некоторое отображение.

5. а) Докажите, что $\mathbb{R}P^\infty$ — пространство типа $K(\mathbb{Z}_2, 1)$.

б) Докажите, что $\mathbb{C}P^\infty$ — пространство типа $K(\mathbb{Z}, 2)$.

6. а) Пусть X_n — множество всех точек $\mathbb{C}^n$ с попарно различными координатами. Докажите, что X_n — пространство типа $K(P_n, 1)$. (Возникающую здесь группу P_n называют *группой крашеных кос* из n нитей.)

б) Пусть Y_n — фактор X_n по действию группы S_n (перестановки координат). Тогда Y_n — пространство типа $K(B_n, 1)$. (Возникающую здесь группу B_n называют *группой кос* из n нитей.

7. Будем рассматривать S^∞ как подмножество $\mathbb{C}^\infty$, состоящее из точек $(z_1, z_2, \dots)$, для которых $\sum |z_i|^2 = 1$. Введём на S^∞ следующее отношение эквивалентности: $(z_1, z_2, \dots) \sim (\varepsilon z_1, \varepsilon z_2, \dots)$, где $\varepsilon = \exp(2\pi i/m)$. Докажите, что $L_m^\infty = S^\infty / \sim$ — пространство типа $K(\mathbb{Z}_m, 1)$.

8. Докажите, что

$$H_n(L_m^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z}_m & \text{для нечётных } n; \\ 0 & \text{для чётных } n > 0. \end{cases}$$

9. Пусть M^3 — трёхмерное многообразие с бесконечной фундаментальной группой, причём $\pi_2(M^3) = 0$. Докажите, что M^3 — пространство типа $K(\pi, 1)$.

10. Пусть X — конечномерный CW-комплекс типа $K(\pi, 1)$. Докажите, что группа π не содержит элементов конечного порядка.