## 2. Точная последовательность пары (17 февраля)

**1.** Для сингулярных гомологий докажите, что $H_k(X,Y) \cong H_k(X \cup CY, CY)$, где $CY$ — конус над $Y$.

**2.** Для сингулярных гомологий докажите, что $H_k(X,Y) \cong H_k(X \cup CY)$ при $k \geqslant 2$.

**3.** Вычислите сингулярные гомологии пары $(D^n, S^{n-1})$ и сингулярные гомологии $S^n$, рассмотрев точную последовательность пары $(D^n, S^{n-1})$.

**4.** Выразите гомологии букета $X \vee Y$ через гомологии $X$ и $Y$.

**5.** Вычислите гомологии пары $(S^p \times S^q, S^p \vee S^q)$.

**6.** Вычислите гомологии $S^p \times S^q$.

### Точная последовательность Майера–Вьеториса для симплициальных гомологий

**7.** Пусть $K$ — симплициальный комплекс, $K_0$ и $K_1$ — такие его подкомплексы, что $K = K_0 \cup K_1$. Положим $L = K_0 \cap K_1$.

а) Докажите, что имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to C_*(L) \xrightarrow{(j_0, -j_1)} C_*(K_0) \oplus C_*(K_1) \xrightarrow{(i_0, i_1)} C_*(K) \to 0,$$

где $j_a : L \to K_a$ и $i_a : K_a \to K$ — естественные вложения.

б) Докажите, что имеет место точная последовательность

$$\cdots \to H_k(L) \to H_k(K_0) \oplus H_k(K_1) \to H_k(K) \to H_{k-1}(L) \to \ldots$$

(*последовательность Майера–Вьеториса*).

**8.** С помощью точной последовательности Майера–Вьеториса вычислите гомологии тора $T^2$.

**9.** Пусть $K$ — симплициальный комплекс, $\Sigma K$ — надстройка над $K$. Докажите, что для любого $k \geqslant 1$ имеется изоморфизм $H_k(\Sigma K) \cong \tilde{H}_{k-1}(K)$.

**10.** а) С помощью точной последовательности Майера–Вьеториса вычислите гомологии дополнения узла в $S^3$ (ответ не зависит от выбора узла).

б) Вычислите гомологии дополнения зацепления в $S^3$, состоящего из $n$ связных компонент (ответ зависит только от $n$).

**11.** Покажите, что для сингулярных гомологий (и произвольных пространств) теорема о точной последовательности Майера–Вьеториса, вообще говоря, неверна.