7. Двойственность Лефшеца и двойственность Александера (24 марта)

1. Предположим, что в сферу S^n, $n \geqslant 3$, вложено m попарно непересекающихся сфер S^{n-2}. Пусть X — их дополнение. Вычислите гомологии X.

2. Пусть $M^{n-1} \subset S^n$ — замкнутое подмногообразие. Докажите, что M^{n-1} ориентируемо и $S^n \setminus M^{n-1}$ состоит из двух связных компонент.

3. а) Докажите, что $\mathbb{R}P^2$ нельзя вложить в $\mathbb{R}^3$.

б) Докажите, что $\mathbb{R}P^2$ можно вложить в $\mathbb{R}^4$.

4. Вычислите индекс самопересечения диагонали в $S^n \times S^n$.

5. Докажите, что если M^{2n} — замкнутое многообразие, то $\chi(M^{2n}) \equiv \dim H_n(M^{2n}; \mathbb{Z}_2) \pmod 2$.

6. Докажите, что если замкнутое многообразие M^m является краем компактного многообразия W^{m+1}, то $\chi(M^m)$ — чётное число.

7. Докажите, что многообразия $\mathbb{R}P^{2n}$ и $\mathbb{C}P^{2n}$ не являются краями компактных многообразий.

8. Докажите, что многообразия $\mathbb{R}P^{2n+1}$ и $\mathbb{C}P^{2n+1}$ являются краями компактных многообразий.

9. а) Докажите, что пересечение циклов задает квадратичную форму на $H_n(M^{2n})/T_n$, где T_n — подгруппа кручения, и форму на $H_n(M^{2n}; \mathbb{R})$.

б) Докажите, что при чётных n эта форма (*форма пересечения*) симметрическая, а при нечётных n кососимметрическая.

в) Докажите, что форма пересечения невырожденная.

г) Докажите, что при изменении ориентации многообразия форма пересечения меняет знак.

Пусть $\sigma(M^{4n})$ — сигнатура (индекс) формы пересечения замкнутого ориентируемого многообразия M^{4n}.

10. Пусть M_1^{4n} и M_2^{4n} — замкнутые ориентируемые многообразия. Докажите, что $\sigma(M_1^{4n} \# M_2^{4n}) = \sigma(M_1^{4n}) + \sigma(M_2^{4n})$.

11. Пусть M^{4k} — замкнутое ориентируемое многообразие, которое является краем компактного ориентируемого многообразия W^{4k+1}. Докажите, что тогда $\sigma(M^{4k}) = 0$.