8. Теорема Кюннета (31 марта)

1. Докажите, что произведение двух замкнутых многообразий ориентируемо тогда и только тогда, когда оба эти многообразия ориентируемы.

2. Докажите, что сфера S^n не является произведением двух многообразий положительной размерности.

3. Пусть K и L — конечные симплициальные комплексы. Докажите, что $\chi(K \times L) = \chi(K)\chi(L)$.

4. Пусть $n > m > 1$. Докажите, что все гомотопические группы пространств $S^n \times \mathbb{R}P^m$ и $S^m \times \mathbb{R}P^n$ изоморфны, а группы гомологий у них разные.

5. Докажите, что все гомотопические группы пространств $S^2 \times \mathbb{R}P^\infty$ и $\mathbb{R}P^2$ изоморфны, а группы гомологий у них разные.

* * *

6. а) Пусть $K = \bigcup_{i=1}^n L_i$, где L_i — стягиваемые подкомплексы. Докажите, что для любых n элементов $\alpha_i \in H^{p_i}(K)$, $p_i > 0$, произведение $\alpha_1 \smile \cdots \smile \alpha_n$ равно нулю.

б) Докажите, что когомологическое умножение в ΣK тривиально, т.е. cup-произведение любых двух когомологических классов положительной размерности равно нулю.

7. а) Докажите, что $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ нельзя представить в виде объединения n стягиваемых подкомплексов.

б) Представьте $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ в виде объединения $n+1$ стягиваемых подкомплексов.