9. Теорема Лефшеца. Теорема Гуревича (7 апреля)

1. а) Пусть отображение $f : S^n \to S^n$ таково, что $\deg f \neq (-1)^{n+1}$. Докажите, что отображение f имеет неподвижную точку.

б) Докажите, что на сфере S^{2n} не существует непрерывного векторного поля без особых точек.

2. Докажите, что любое отображение $f : \mathbb{R}P^{2n} \to \mathbb{R}P^{2n}$ имеет неподвижную точку.

3. Пусть $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ — непрерывное отображение. Докажите, что число Лефшеца отображения f равно $1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n$, где $\lambda \in \mathbb{Z}$.

4. Докажите, что если n чётно, то любое непрерывное отображение $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ имеет неподвижную точку.

5. Пусть K — конечный симплициальный комплекс, $f : K \to K$ — непрерывное отображение, p — простое число, $f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p}$. Докажите, что $\Lambda(f^p) \equiv \Lambda(f) \pmod p$. (Здесь $\Lambda(f)$ — число Лефшеца.)

6. Докажите, что замкнутое односвязное трёхмерное многообразие M^3 гомотопически эквивалентно S^3.

7. Пусть M^n $(n \geqslant 3)$ — замкнутое многообразие размерности n, причём $\pi_k(M^n) = 0$ при $k \leqslant n/2$. Докажите, что M^n гомотопически эквивалентно сфере S^n.

8. а) Докажите, что надстройка над ацикличным CW-комплексом стягиваема.

б) Приведите пример нестягиваемого пространства, надстройка над которым стягиваема.