Листок №1
Поля

Алгебраическая зависимость (независимость)

Поле L называется *расширением конечного типа* своего подполя K, если существуют такие элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ из L, что любой элемент из L представляется рациональной функцией от $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ с коэффициентами из поля K. В этом случае пишут $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Пусть L — расширение K. Семейство элементов $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ поля L называется *алгебраически зависимым*, если существует такой многочлен $F \in K[X_1, \dots, X_n]$, не равный тождественно нулю, что $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$.

Если при этом элемент α_n входит в это соотношение (то есть многочлен от одной переменной $F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, X_n)$ не равен тождественно нулю), то α_n называется алгебраически зависимым от $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$.

0. Дать определение алгебраически независимого семейства.

1. Доказать, что если элемент α алгебраически зависит от $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, а каждый из α_i, в свою очередь, алгебраически зависит от элементов $\beta_1, \dots, \beta_m$, то α алгебраически зависит от $\beta_1, \dots, \beta_m$.

2. Доказать, что в расширении конечного типа мощность алгебраически независимого семейства конечна.

3. Доказать, что в расширении конечного типа все максимальные алгебраически независимые семейства содержат одно и то же число элементов.
Это число называется *степенью трансцендентности L над K* и обозначается $\operatorname{tr\,deg} L/K$.

4. Пусть L — поле рациональных функций на кривой $C = \{x^2 + y^3 + y + 1 = 0\}$ в $\mathbb{C}^2$. Вычислить $\operatorname{tr\,deg} L/\mathbb{C}$.

5. Показать, что класс конечных алгебраических расширений совпадает с классом расширений конечного типа степени трансцендентности 0.

6. Любое расширение L поля K изоморфно алгебраическому расширению или самого поля K, или поля рациональных функций над K. (Можно предполагать, что расширение L – конечного типа над K; или этого не предполагать, но тогда пользоваться чем-то типа леммы Цорна.)

"Верую" 1

Можно доказать, что для любого поля P существует алгебраически замкнутое алгебраическое расширение $\overline{P}$. Поле $\overline{P}$ определено с точностью до изоморфизма, тождественного на поле P.

Мы будем постоянно этим пользоваться.

Конечные поля

7. Порядок любого конечного поля равен p^n, где p — простое число.

8. Для любого $q = p^n$ существует единственное (с точностью до изоморфизма) поле F_q порядка q.
Воспользоваться существованием поля $\overline{F_p}$ и исследовать корни многочлена $x^q - x$.

9. Мультипликативная группа любого конечного поля — циклическая.
Воспользоваться тем, что нециклическая конечная абелева группа содержит подгруппу $\mathbb{Z}_t \oplus \mathbb{Z}_t$ для некоторого простого t.

10. Группа автоморфизмов конечного поля F_q, где $q = p^n$, — циклическая группа порядка n. В качестве ее образующей можно выбрать автоморфизм Фробениуса $x \longmapsto x^p$.

Разное

11. Пусть L — конечное расширение поля K, и $K(X_1, \ldots, X_n)$ – поле рациональных функций над K. Доказать, что тензорное произведение $L \otimes K(X_1, \ldots, X_n)$ изоморфно $L(X_1, \ldots, X_n)$ (полю рациональных функций над L).

12. Пусть L — алгебраическое расширение поля K, и каждый отличный от константы многочлен над K имеет корень в L. Доказать, что поле L алгебраически замкнуто.
Решив эту задачу, вернитесь еще раз к *"Верую" 1*.