Листок №2
Элементы теории Галуа

1. Построить ненормальную башню $F < K < E$ с нормальными этажами.

2. Доказать, что $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ — расширение Галуа. Найти $\mathrm{Gal}\, E/\mathbb{Q}$.

3. Аккуратно доказать лемму из лекции о продолжении вложений для сепарабельных расширений.

4. Доказать, что поле разложения сепарабельного многочлена есть расширение Галуа.

5. Доказать, что (нормальность + сепарабельность) = (расширение Галуа).

6. Найти группу Галуа поля разложения многочлена $x^3 - 2$ над $\mathbb{Q}$.

7. Найти группу Галуа поля разложения многочлена $(x^2 - 2)(x^2 - 3)$ над $\mathbb{Q}$.

8. Доказать, что группа Галуа поля разложения многочлена $x^4 - 2$ над $\mathbb{Q}$ изоморфна группе диэдра D_8.

9. Доказать, что группа Галуа поля разложения неприводимого сепарабельного многочлена транзитивно действует на его корнях.

10. Пусть неприводимый многочлен пятой степени с рациональными коэффициентами обладает двумя комплексными и тремя вещественными корнями. Доказать, что группа Галуа его поля разложения над $\mathbb{Q}$ изоморфна S_5.

11. Вычислить $\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{1})/\mathbb{Q}\right)$.

12. Пусть F_q — конечное поле, $q = p^n$. Доказать, что минимальные многочлены над F_p элементов α и α^p совпадают.