Алгебра, листок 3 от 15 февраля

Ящик с инструментами (1)

Про модули и кольца

Лемма Цорна если для любого линейно упорядоченного подмножества непустого упорядоченного множества $(S, \leq)$ существует верхняя грань в S, то S обладает по крайней мере одним максимальным элементом m (т.е. из $m \leq s$ следует, что $m = s$).

1. Пусть T подмножество модуля M и $N < M$ – его подмодуль, причем пересечение $N \cap T$ либо пусто, либо состоит из 0. Тогда N содержится в подмодуле, являющимся максимальным относительно этого свойства. Доказать.

2. Каждый собственный идеал кольца содержится в максимальном собственном идеале. Доказать.

Гомоморфизмы, подмодули и фактор-модули

3. Если $f : M \longrightarrow N$ — гомоморфизм A-модуля M на модуль N, то $\ker\ f = f^{-1}(0)$ является A-модулем и $M/\ker f = N$.

4. Если M и N подмодули одного и того же A-модуля, то $(M + N)/N = M/(M \cap N)$.

5. Пусть $N < M$ подмодуль модуля M. Тогда каждый подмодуль модуля M/N имеет вид L/N, где $N < L < M$ и $M/L = (M/N)/(L/N)$.

6. Если $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$, $N = N_1 \oplus \ldots \oplus N_k$ и $N_i < M_i$, то $M/N = M_1/N_1 \oplus \ldots \oplus M_k/N_k$.

   Убывающая цепочка подмодулей $M = M_1 > M_2 > \ldots > M_k > 0$ называется композиционным рядом модуля M, если все фактор-модули $N_i = M_i/M_{i+1}$ просты (т.е. не содержат нетривиальных собственных подмодулей).

7. Как построить композиционный ряд модуля M, если известны композиционные ряды для модуля N и фактормодуля M/N?

8. Если модуль M прост, то кольцо $Hom_A(M, M)$ является полем. (Лемма Шура).

9. (Жордан и Гельдер) Любые два композиционных ряда (если существуют) имеют одинаковую длину и изоморфные фактормодули N_i (с точностью до перестановки индексов).

10. Построить композиционный ряд абелевой группы $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{24}$.

Нетеровы модули

11. Модуль является нетеровым тогда и только тогда, когда каждая возрастающая последовательность его подмодулей стабилизируется.

12. Всегда ли нетерово подкольцо нетерова кольца?

13. Если A-нетерово кольцо, то каждый подмодуль N конечно порожденного модуля M конечно порожден.

14. Следует ли из нетеровости подмодуля N и фактормодуля M/N нетеровость M?