Листок №4

Азы алгебры стрелочников. Проективные модули (первое знакомство). Задачи с обочины.

Последовательность морфизмов модулей $\ldots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{\varphi_i} A_i \xrightarrow{\varphi_{i+1}} A_{i+1} \longrightarrow \ldots$ называется *точной*, если $\operatorname{Im}\varphi_i = \operatorname{Ker}\varphi_{i+1}$ для всех i.

1. Что означает точность последовательности
а) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B$
б) $A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$?

2. Следующие свойства точной последовательности $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$ (она называется *короткой точной*) эквивалентны:
а) $\varphi \circ i = \mathrm{id}_A$ для некоторого $\varphi : B \longrightarrow A$
б) $\pi \circ \psi = \mathrm{id}_C$ для некоторого $\psi : C \longrightarrow B$
в) $B = \operatorname{Im} i \oplus H$ для некоторого подмодуля $H \subseteq B$
г) существует такой эндоморфизм $f : B \longrightarrow B$, что $f^2 = f$ и $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} i$

Короткая точная последовательность, обладающая этими свойствами, называется *расщепляющейся.*

3. Всякая короткая точная последовательность векторных пространств расщепляется.

4. Пусть

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \varphi\big\downarrow & & \psi\big\downarrow & & \chi\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

коммутативная диаграмма с точными строками. Доказать, что ψ — мономорфизм (эпиморфизм), если φ и χ — мономорфизмы (эпиморфизмы).

Модуль P называется *проективным*, если существует такой свободный модуль F, что $F = P \oplus H$ для некоторого подмодуля $H \subseteq F$. (В частности, свободный модуль проективен.)

5. Следующие свойства модуля P эквивалентны:
а) P проективен
б) всякая точная последовательность $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ расщепляется
в) всякая диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P & & \\
 & & \big\downarrow & & \\
A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

с точной строкой дополняется до коммутативной некоторым морфизмом $P \longrightarrow A$.

6. Модуль конечно порожден и проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым конечно порожденного свободного модуля.

7. Любой конечнопорожденный проективный модуль над кольцом главных идеалов свободен.

(Указание: следует из более общего утверждения о том, что любой подмодуль конечно порожденного свободного модуля над кольцом главных идеалов свободен. В свою очередь, этот факт моно доказать, имитируя его доказательство над $\mathbb{Z}$ - последняя лекция 1 семестра.)

8*. Привести пример проективного, но не свободного модуля.

Задачи с обочины

9. Пусть $\mathbb{Z}(n)$ — кольцо вычетов $\mod n$, $n = \prod {p_i}^{n_i}$ — разложение n на простые множители. Тогда $\mathbb{Z}(n)$ изоморфно прямому произведению колец $\mathbb{Z}({p_i}^{n_i})$.

10. Пусть $\mathbb{Q}_p$ — подкольцо поля $\mathbb{Q}$, состоящее из рациональных чисел, знаменатели которых — степени простого числа p. Тогда абелева группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ есть прямая сумма групп $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$.

11. (Рабочий вариант леммы Гаусса.)
Пусть A — факториальное кольцо, K — поле частных кольца A, α — корень многочлена $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_i \in A$. Доказать, что минимальный многочлен α в $K[X]$ со старшим коэффициентом 1 лежит в $A[X]$.